

การแสดงผลเชิงรูปภาพในทฤษฎีการแสดงแทนทางคณิตศาสตร์:  
แผนภาพเชิงดำเนินการและวิธีการมอง

Figural Representations on Theory of Mathematical Representations:  
Operational Diagram and Ways to See

มาซามิ อิโซตะ<sup>1,2\*</sup>

Masami Isoda<sup>1,2\*</sup>

<sup>1</sup>Bureau of Global Initiatives, the University of Tsukuba

<sup>2</sup>อาจารย์พิเศษ คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น

<sup>2</sup>Faculty of Education, Khon Kaen University

\*Corresponding author, E-mail address: isodamasami@yahoo.co.jp

คณะผู้แปล

จิตรลดา ใจกล้า<sup>3</sup> ชนิกา เสนาวงค์<sup>3</sup> นิศากร บุญเสนา<sup>3</sup> เจนสมุทร แสงพันธ์<sup>4</sup> และพิมพ์ผกา อินทรธ<sup>5</sup>

<sup>3</sup>คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น

<sup>3</sup>Faculty of Education, Khon Kaen University

<sup>4</sup>คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

<sup>4</sup>Faculty of Education, Chiang Mai University

<sup>5</sup>คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏลำปาง

<sup>5</sup>Faculty of Science, Lampang Rajabhat University

บทคัดย่อ

ในบทความนี้ได้้นำทฤษฎีการแสดงแทนทางคณิตศาสตร์ (Isoda, 1990) มาประยุกต์ใช้เพื่อจำแนกประเภทต่าง ๆ ของภาพ รูปร่าง และแผนภาพ ที่สามารถถือว่าการแสดงแทนทางคณิตศาสตร์ได้ ควบคู่ไปกับการแสดงแทนรูปแบบพีชคณิตและรูปแบบอื่น ๆ เพื่ออธิบายการตีความที่มีลักษณะเฉพาะของการแสดงแทนทางคณิตศาสตร์แบบลายลักษณ์อักษร อิโซตะได้กำหนดลักษณะของการแสดงแทนโดยอิงตามบริบท/วัตถุประสงค์ สัญลักษณ์ที่มุ่งเน้น และการปฏิบัติการที่มุ่งเน้น เพื่ออธิบายคำว่า "จุดเน้น (focus)" วิธีการมองหรือทำความเข้าใจสิ่งนั้น (way to see) ถูกอธิบายผ่านการใช้กรอบหลักสูตร (Curriculum Framework) เพื่อพัฒนาการคิดทางคณิตศาสตร์ (Isoda, Teh, Gan, 2024) ภายใต้กรอบแนวคิดนี้ เมื่อมีการใช้การแสดงแทนเชิงรูปภาพบางประเภทเป็นเครื่องมือในการคิด ก็สามารถรับรู้ได้ว่าการแสดงแทนเชิงรูปภาพนั้น เป็นการแสดงแทนทางคณิตศาสตร์เช่นกัน เมื่อถูกใช้เป็นเครื่องมือในการคิด มุมมองนี้ชี้ให้เห็นถึงความจำเป็นของการสอนการแสดงแทนเชิงรูปภาพในแบบเรียนคณิตศาสตร์ที่มีต้นกำเนิดจากประเทศญี่ปุ่น (Isoda & Inprasitha,

2013) ไม่ใช่เพียงแค่การใช้เป็นเครื่องมือประกอบการอธิบายของครูเป็นครั้งคราวเท่านั้น แต่ยังเป็นเครื่องมือสำคัญในการคิดสำหรับการเรียนรู้ในอนาคตของผู้เรียนอีกด้วย

**คำสำคัญ:** การคิดทางคณิตศาสตร์ สัณยศาสตร์ แผนภาพ การดำเนินการ สหัชญาณ

### Abstract

In this article, the Theory of Mathematical Representation (Isoda, 1990) was applied to distinguish different types of pictures, drawings, and figures that can be regarded as mathematical representations, alongside algebraic and other forms of representation. To clarify the unique interpretation of written mathematical representation, Isoda defined its nature in terms of context/objective, focused symbol, and focused operation. And to explain 'focus,' the ways to see is explained by using Curriculum Framework to develop mathematical thinking (Isoda, Teh, Gan, 2024). Using this framework, some figural representations can also be recognized as a form of mathematical representation when used as tools for thinking. This perspective highlights the necessity of teaching figural representations in Japanese origin mathematics textbooks (Isoda & Maitree, 2013), not merely as explanatory tools used by teachers on an ad hoc basis, but as essential thinking tools for students' future learning.

**Keywords:** Mathematical Thinking, Semiotics, Diagram, Operation, Intuition

### บทนำ

ตามแนวคิดของ David Tall (2013) คณิตศาสตร์สามารถจำแนกออกเป็นสามโลก ได้แก่ Embodiment, Symbolism และ Formalism โลกของ Symbolism และ Formalism มักปรากฏในรูปของการแสดงแทนทางคณิตศาสตร์แบบทางการ (formal representations) ซึ่งมักแสดงผ่าน สัญลักษณ์พีชคณิต เช่น สมการที่เขียนด้วยโปรแกรม MathType ใน Microsoft Word ในประวัติศาสตร์ของการศึกษาคณิตศาสตร์ เลขคณิต (Arithmetic) ซึ่งถูกนำเข้าสู่ยุโรปในช่วงยุคกลางผ่านผลงาน เช่น Liber Abaci ของ Leonardo Fibonacci (Stigler, 2002) เดิมทีถูกแสดงแทนด้วย วิธีการคำนวณแบบคอลัมน์ (Column methods) ก่อนที่จะพัฒนาสู่รูปแบบพีชคณิตในยุคของ René Descartes (Inprasitha, Isoda & Araya, 2023) ในหนังสือ Liber Abaci มีการแนะนำเลขอารบิกตั้งแต่ 1 ถึง 9 ให้ใช้เป็นตัวเลข (figure) และเลข 0 ถูกเรียกว่า "zepher" แทนที่จะใช้ตัวอักษร "o" ของอักษรภาษาอังกฤษ จากมุมมองนี้ นิพจน์เลขคณิต เช่น  $1+1=2$  จึงถูกทำให้เป็นรูปแบบทางการผ่าน สัญลักษณ์พีชคณิต ในอีกด้านหนึ่ง การแสดงแทนเชิงรูปภาพ

(figural representations) ซึ่งอยู่ในโลกของ Embodiment ไม่ได้ถูกรวมอยู่ในระบบการพิมพ์สมการ เช่น MathType การแสดงแทนเชิงรูปภาพซึ่งถูกใช้ในคณิตศาสตร์ระดับโรงเรียนและสอนให้นักเรียนใช้ทั้งในการวาดและการตีความ ได้แก่ กราฟในระบบพิกัดต่าง ๆ (เช่น เส้นจำนวน (number line) และ เวกเตอร์ (vector)) กราฟทางสถิติ และรูปเรขาคณิต นอกจากนี้ ตาราง และ ผังงาน (flowcharts) รวมถึง ลูกศร ที่ใช้แสดงความสอดคล้องและความสัมพันธ์บนแผนภาพสองมิติ ก็สามารถถือได้ว่าเป็นรูปแบบหนึ่งของการแสดงแทนเชิงรูปภาพที่มีแบบแผน (formal figural representation) การแสดงแทนเหล่านี้มักถูกใช้โดยนักเรียนในฐานะ เครื่องมือในการคิด (thinking tools) เพื่อช่วยให้สามารถตีความความหมายทางคณิตศาสตร์ของสัญลักษณ์เชิงพีชคณิต (algebraic notation) ได้อย่างลึกซึ้งและมีประสิทธิภาพมากขึ้น อย่างไรก็ตาม ยังมีคำถามเกี่ยวกับการแสดงแทนเชิงรูปภาพประเภทอื่น ๆ ที่ปรากฏในห้องเรียนคณิตศาสตร์ ครูในระดับประถมศึกษาและมัธยมศึกษาตอนต้นมักใช้แผนภาพเพิ่มเติมเพื่ออธิบายความหมายของการแสดงแทนที่เป็นแบบแผนในคณิตศาสตร์ระดับโรงเรียน นอกจากนี้ วัตถุที่ใช้ในการจัดกระทำเชิงกายภาพ (manipulative physical objects) ยังสามารถแสดงแทนด้วยภาพ เช่น รูปภาพ อย่างไรก็ตามเป็นที่น่าเสียดายว่า ในหลายกรณี นักเรียนไม่ได้ถูกขอให้สร้างภาพเหล่านี้ด้วยตนเองเพื่อใช้เป็น เครื่องมือในการคิด ยกเว้นในลักษณะของการจดบันทึก เนื่องจากครูมักใช้ภาพเหล่านี้เป็นเพียงเครื่องมือเพื่อสนับสนุนการเรียนรู้เกี่ยวกับการแสดงแทนที่เป็นแบบแผน เมื่อผู้เรียนสามารถจัดการกับการแสดงแทนเชิงพีชคณิตหรือการแสดงแทนที่เป็นแบบแผนได้โดยตรง จึงมักมองว่า การใช้ภาพเพื่อเป็นเครื่องมือช่วยสนับสนุนการเรียนรู้ นั้น ไม่จำเป็นอีกต่อไป คำถามสำคัญจึงเกิดขึ้นว่า การแสดงแทนเชิงรูปภาพประเภทใดสามารถถือได้ว่าเป็นส่วนหนึ่งของการแสดงแทนทางคณิตศาสตร์ในฐานะเครื่องมือในการคิดที่จำเป็น

ในงานวิจัยด้านคณิตศาสตร์ศึกษา มักเรียก ภาพวาดของนักเรียนที่ไม่ได้เป็นแบบแผน ว่า การแสดงแทนที่ไม่เป็นแบบแผน (informal representation) การแสดงแทนลักษณะนี้ช่วยสนับสนุนการพัฒนาเส้นทางการเรียนรู้ (learning trajectory) ที่ทำให้ การแสดงแทนที่เป็นแบบแผนค่อย ๆ เกิดขึ้นจากการแสดงแทนที่ไม่เป็นแบบแผน (Gravemeijer, 1999) คำถามสำคัญจึงอยู่ที่ว่า เราจะสามารถออกแบบกระบวนการพัฒนานี้ในระยะยาวข้ามระดับชั้นเรียนได้อย่างไร ในประเทศที่ครูจำเป็นต้องใช้หนังสือเรียนที่ได้รับการรับรองจากรัฐบาล เช่น ประเทศญี่ปุ่น ครูมักพยายามพัฒนานักเรียนให้สามารถ คิดได้ด้วยตนเองและเพื่อการคิดของตนเองโดยใช้การแสดงแทนเชิงรูปภาพที่นักเรียนเคยเรียนรู้และใช้มาก่อน เนื่องจากการแสดงแทนเหล่านี้ ถูกนำเสนออย่างเป็นระบบตั้งแต่ระดับชั้นต้นๆ เพื่อให้เป็นเครื่องมือในการคิดสำหรับการเรียนรู้ในระดับชั้นที่สูงขึ้น โดยเฉพาะหนังสือเรียนที่มีต้นกำเนิดจากประเทศญี่ปุ่น เช่น ฉบับภาษาไทย (Isoda &

Inprasitha, 2013) ซึ่งใช้การแสดงแทนเชิงรูปภาพในลักษณะที่สอดคล้องกันอย่างต่อเนื่อง เพื่อช่วยให้นักเรียนใช้สิ่งที่เคยเรียนรู้มาแล้วเป็นเครื่องมือในการเผชิญกับปัญหาใหม่

เพื่อการพัฒนาในระยะยาว บทความนี้จึงมุ่งตอบคำถามว่า การแสดงแทนเชิงรูปภาพประเภทใดสามารถมองได้ว่าเป็นการแสดงแทนทางคณิตศาสตร์ในฐานะเครื่องมือในการคิดของนักเรียน โดยใช้ ทฤษฎีการแสดงแทนทางคณิตศาสตร์ (Theory of Mathematical Representation) ของ Masami Isoda (1990) Isoda (1990, 1993, 2015, 2018) ได้พัฒนาทฤษฎีนี้ขึ้นเพื่อทำให้กระบวนการทำให้เป็นคณิตศาสตร์ (mathematization) มีลักษณะทั่วไป โดยอาศัยแนวคิดของ Hans Freudenthal (1972) ซึ่งอธิบายว่าคณิตศาสตร์เกิดจากกระบวนการ จัดระเบียบประสบการณ์ทางคณิตศาสตร์ใหม่ผ่านการทำให้ประสบการณ์เหล่านั้นกลายเป็นวัตถุทางความคิด (objectifying mathematical experience)

## 2. ทฤษฎีการแสดงแทนทางคณิตศาสตร์ (Theory for Mathematical Representations) (ส่วนที่ 1)

ก่อนที่จะมุ่งเน้นไปที่ การแสดงแทนเชิงรูปภาพ (Figural Representations) ประการแรก เราต้องการทำความเข้าใจ ลักษณะธรรมชาติของการแสดงแทนทางคณิตศาสตร์ (Mathematical Representation) โดยพิจารณาจากกรณีของ การแสดงแทนเชิงพีชคณิต (Algebraic Representation)

### 2-1. วัตถุประสงค์และบริบท (Objective and Context): แนวทางในการพิจารณา

การแสดงแทนทางคณิตศาสตร์ สื่อถึงวัตถุประสงค์และบริบทด้วยการใช้รูปแบบที่มีลำดับขั้นเฉพาะ (specific sequential forms) ซึ่งสามารถตีความเป็นประโยคทางคณิตศาสตร์ (mathematical sentences) ได้ หากเข้าใจรูปแบบนั้น

|                                                          |                                                          |                                                                    |                                                                     |
|----------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------|
| <p>Q1 สิ่งนี้คืออะไร</p> $x = 3$ $2(x - 1) = 4$ $2x = 6$ | <p>Q2 สิ่งนี้คืออะไร</p> $2(x - 1) = 4$ $2x = 6$ $x = 3$ | <p>A1. <math>2(x - 1) = 4</math></p> $2x - 2 = 4$ $2x = 6$ $x = 3$ | <p>Q3 เมื่อ</p> $2(x - 1) = 4,$ <p>จงหาค่าของ</p> $\frac{x - 1}{2}$ |
|----------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------|

ภาพ 1 วิธีการมองหรือการตีความที่หลากหลาย

ใน Q1 ของภาพ 1 การตีความที่เป็นไปได้คือ “กลุ่มของสมการที่แต่ละสมการมีคำตอบเป็น 3” หรือกล่าวได้ว่า “เป็นเซตของสมการที่มีค่า  $x$  เท่ากับ 3” หรือ “ถ้าแก้สมการแต่ละสมการ คำตอบคือ 3” หากเรามอง เซต (set) จากมุมมองนี้ สามารถถูกตีความได้ว่าเซตนั้นเป็นตระกูลของสมการ (a family of equations) มิฉะนั้นแล้ว ก็จะเป็นเพียง สมการที่แตกต่างกันหลายสมการ และไม่สามารถตีความอย่างมีความหมายว่าเป็นตระกูลของสมการได้ ใน Q2 ของภาพ 1 การตีความที่เป็นไปได้คือ “คำตอบของสมการ  $2(x - 1) = 4$ ” (ดู

Q2 และ A1) หรือหากอธิบายแบบทีละขั้นตอนคือ “จากบรรทัดแรกไปบรรทัดที่สอง ทำการแจกแจง (expand) และย้ายข้าง (transpose); จากบรรทัดที่สองไปบรรทัดที่สาม หารทั้งสองข้างด้วย 2” (ดู A1) ในทางคณิตศาสตร์ การตีความ Q2 นี้เรียกว่า “การแก้สมการ (the solving an equation)” ซึ่งเป็นศัพท์เฉพาะสำหรับการแสดงแทนแบบลำดับขั้นของสมการ (sequential representation of equation) และยังเป็นกระบวนการที่วัตถุประสงค์และบริบทไปพร้อมกัน จากการอธิบายนี้ หากเราเห็นเพียงแค่ “ $x = 3$ ” เพียงรูปแบบเดียว เราไม่สามารถระบุวัตถุประสงค์ได้โดยไม่เติมลำดับของสมการเพิ่มเติม ความจริงแล้ว “ $x = 3$ ” สามารถแสดงบริบทที่ต่างกัน เช่น “แทนค่า  $x = 3$  ลงในสมการอื่น ๆ ใน Q1” หรือ “คำตอบของสมการคือ  $x = 3$ ” ใน Q2 ในทางกลับกัน หากมีการให้ชุดของรูปแบบที่มีลำดับขั้น (sequential forms) ที่สามารถตีความด้วยศัพท์ทางคณิตศาสตร์ เราก็สามารถระบุทั้งวัตถุประสงค์และบริบทได้อย่างชัดเจนและเฉพาะเจาะจง

ใน Q3 จากภาพ มีการนำเสนอปัญหาคณิตศาสตร์ในรูปประโยคที่ประกอบด้วยทั้งสมการ (equation) และนิพจน์ (expression) โดยมีวิธีการหาคำตอบที่เป็นไปได้อย่างน้อยสองแนวทาง แนวทางแรกคือหากต้องการหาค่าของ  $\frac{x-1}{2}$  จำเป็นต้องรู้ค่าของ  $x$  ก่อน ดังนั้นจึงทำการแก้สมการ  $2(x-1)=4$  แล้วจึงแทนค่าตอบลงใน  $\frac{x-1}{2}$  แนวทางที่สองคือสังเกตว่าปัญหานี้มีพจน์  $x-1$  ปรากฏอยู่สองครั้ง ดังนั้นสามารถหาค่า  $x-1=2$  ก่อน แล้วแทนค่าได้โดยตรงใน  $\frac{x-1}{2}$

ตามที่ Polya (1945) ชี้ให้เห็นว่าปัญหาสามารถแบ่งออกเป็นปัญหาย่อย (sub-problems) เพื่อหาวิธีแก้ได้ วิธีการทั้งหมดสามารถสรุปได้ในรูปข้อความสั้น ๆ (brief statement) และเพื่ออธิบายแต่ละวิธีแก้ปัญหาย่อย (sub-solution) มากขึ้นสามารถสรุปในรูปข้อความได้เช่นกัน ข้อความเหล่านี้แสดงเหตุผลว่าทำไมจึงดำเนินการขั้นตอนการแก้ปัญหานั้นๆ ยิ่งไปกว่านั้นวิธีแก้ปัญหาย่อยแต่ละวิธียังสามารถแบ่งออกเป็นหลายขั้นตอนได้ แม้ว่าขั้นตอนแต่ละขั้นสามารถอธิบายได้ด้วยศัพท์ของการดำเนินการ แต่สิ่งนี้เพียงแสดงให้เห็นถึงความถูกต้องเชิงตรรกะ (logical correctness) ระหว่างแต่ละบรรทัดเท่านั้น แม้จะสะสมลำดับของทุกขั้นตอนเหล่านี้ ก็ให้เพียงความถูกต้องเชิงตรรกะ แต่ไม่จำเป็นต้องเปิดเผย วัตถุประสงค์และบริบท (objective and context)—กล่าวคือ มุมมองเชิงเกสตัลท์ (Gestalt view) ที่บอกว่าทำไมเราจึงดำเนินการเหล่านี้เพื่อแก้ปัญห

ในโครงสร้างลำดับขั้น (hierarchical structure) นี้ วิธีการแก้ปัญหทั้งหมดและวิธีการแก้ปัญหาย่อยสามารถตีความได้ในแง่ของคำว่า “ทำไม” (why) ขณะที่แต่ละขั้นตอนสามารถตีความได้ในแง่ของคำว่า “ความถูกต้อง” (correctness)

## 2-2. สัญลักษณ์และการดำเนินการที่มุ่งเน้น (Focused Symbols and Operations)

Freudenthal (1983) วิเคราะห์คำศัพท์ที่ใช้ในคณิตศาสตร์ระดับโรงเรียนเพื่อเป็นสิ่งนามธรรมทางคณิตศาสตร์ที่ถูกนิยามหรือถูกแทนด้วยสัญลักษณ์ (Mathematical Entities) เพื่อให้ผู้เรียนใช้เป็นวัตถุแห่งการคิด (The objects of thought) ระดับของตัวแสดงแทนต่างๆ (The layers) ที่อธิบายได้ว่าเป็นโครงสร้างแบบลำดับชั้น (Hierarchical Structure) สามารถวิเคราะห์ได้โดยใช้สัญศาสตร์ของ Peirce (Peirce's semiotics) ซึ่งอธิบายว่าความหมายของสัญลักษณ์ (Sign) ถูกกำหนดโดยตัวแทนเชิงสัญลักษณ์ (สัญลักษณ์) (Representamen (sign)) วัตถุเชิงสัญลักษณ์ (The semiotic object) และการตีความ (The interpretant) (Atkin, 2023; Saengpun and Inprasitha, 2012)

ในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ตัวแสดงแทนเชิงสัญลักษณ์ (representamen) สามารถถูกมองได้ในหลายระดับ เช่น ระดับบนสุดคือ วิธีเฉลยทั้งหมด (the whole entire solution) ระดับถัดมาคือ ส่วนย่อยของวิธีเฉลย (sub-solution) และระดับที่สามคือ ขั้นตอนย่อยแต่ละขั้น (individual steps) อย่างน้อยในกรณีของ ข้อ Q3 วัตถุเชิงสัญลักษณ์ที่ใช้ในการตีความ (semiotic object) จะเปลี่ยนแปลงไปตามแต่ละระดับเหล่านี้ และมีการใช้ศัพท์เฉพาะทางคณิตศาสตร์ เพื่อแยกแยะความแตกต่างระหว่างระดับเหล่านี้

จากมุมมองของวัตถุประสงค์ในการแก้ปัญหา วิธีการที่สัญลักษณ์และการดำเนินการถูกใช้ในฐานะของสิ่งที่ขึ้นอยู่กับวิธีที่พวกเราตีความและวิธีการต่างๆ ในการแก้ปัญหา ตัวอย่างเช่น ในวิธีการแก้ปัญหาที่หนึ่งใน Q3 สัญลักษณ์ที่มุ่งเน้น คือ  $x$  และการดำเนินการที่มุ่งเน้น คือ การแก้ปัญหาสำหรับ  $x$  โดยใช้คุณสมบัติของสมการ วิธีการแก้ปัญหาที่สอง สัญลักษณ์ที่มุ่งเน้น คือ  $x - 1$  และการดำเนินการที่มุ่งเน้น คือ การแทนที่ด้วย  $x - 1$  ในกรณีนี้นิยามศัพท์ทางคณิตศาสตร์ คือ นิพจน์  $x - 1$  ถือเป็นค่า ๆ หนึ่ง ที่สะท้อนถึงวิธีการมองหรือตีความนิพจน์และสมการในมุมมองของ Gestalt

### 2-3. คำจำกัดความ (ส่วนที่ 1): การแสดงแทนทางคณิตศาสตร์

หน่วยของการแสดงแทนทางคณิตศาสตร์ (a unit of mathematical representation) ซึ่งอยู่ในรูปของชุดของรูปแบบเชิงลำดับเฉพาะ (a specific set of sequential forms) ถูกกำหนดโดยวัตถุประสงค์ (objective) สัญลักษณ์ที่เป็นจุดเน้น (focused symbols) และการดำเนินการที่เป็นจุดเน้น (focused operations) หน่วยของการแสดงแทนดังกล่าวสามารถตีความในเชิงคณิตศาสตร์ได้ในแง่ของเหตุผล (why) (ในกรณีของการแก้สมการดังที่ปรากฏในข้อ Q2) ในขณะที่รูปแบบต่าง ๆ ที่อยู่ระหว่างขั้นตอนเหล่านั้นถูกอธิบายผ่านการดำเนินการ (operations) (เช่นขั้นตอนเชิงตรรกะ (logical steps) ดังที่ปรากฏใน A1) ในลำดับของสมการใน Q2 การดำเนินการที่เป็นจุดเน้นอ้างอิงถึงขั้นตอนวิธี (algorithm) สำหรับการแก้สมการ แม้ว่าขั้นตอนย่อยในระหว่างนั้นจะเกี่ยวข้องกับการดำเนินการเช่นกัน ดังนั้น หน่วยของการแสดงแทนที่สื่อถึง

วัตถุประสงค์ จึงมีศูนย์กลางอยู่ที่การแสดงแทนทางคณิตศาสตร์ในฐานะชุดของรูปแบบเชิงลำดับ (a set of sequential forms) มากกว่าที่จะมุ่งเน้นไปที่ทุกๆ รูปแบบที่เป็นรูปแบบเดี่ยว (single form)

ตามแนวคิดด้านสัญศาสตร์ (semiotics) ของ Peirce เครื่องหมาย (sign) ไม่ได้จำกัดอยู่เพียงสัญลักษณ์ (symbols) เท่านั้น แต่สามารถเป็นสิ่งที่ได้ เมื่อขยายกรอบแนวคิดนี้ไปสู่การศึกษาการแสดงแทนทางคณิตศาสตร์ โดยขยายจากรูปแบบพีชคณิตไปสู่การแสดงแทนเชิงรูปภาพ (figural representations) เราสามารถพิจารณาแผนภาพสองมิติ (2-D diagrams) ในฐานะสัญลักษณ์ชนิดหนึ่ง อย่างไรก็ตาม เนื่องจากในสัญศาสตร์ เครื่องหมาย (sign) มักไม่ถูกเชื่อมโยงกับการดำเนินการ (operations) โดยตรง ผู้เขียนจึงยังคงใช้คำว่า symbol แทนคำว่า sign ต่อไป ภายใต้การขยายความหมายนี้ การวาดภาพ (drawing) และ การจัดการหรือการเคลื่อนย้ายวัตถุ (manipulation) ก็สามารถถือได้ว่าเป็นการดำเนินการ (operations) เช่นเดียวกัน (Jean Piaget, 1972) แนวคิดนี้จะถูกอธิบายเพิ่มเติมใน บทถัดไป ผ่านกรณีศึกษาที่เกี่ยวข้องกับ แผนภาพ (diagrams)

### 3. การขยายไปสู่การแสดงแทนเชิงรูปภาพ

ในส่วนนี้ ทฤษฎีถูกอธิบายผ่านกรณีของการแสดงแทนเชิงรูปภาพ โดยใช้ภาพ 2 (Isoda, 2015)

#### 3-1. กรณีศึกษา

ผู้เขียนได้ตั้งคำถาม Q4 ขึ้น เพื่อทำให้เห็นอย่างชัดเจนถึง ความสำคัญของการแสดงแทนเชิงรูปภาพ (figural representation) แก่นักศึกษาระดับบัณฑิตศึกษา ผู้ซึ่งต้องการศึกษาหน้าที่ของการแสดงแทนเชิงรูปภาพในพีชคณิต

ต่อไปนี้เป็นข้อสรุปของการอภิปราย

ประการแรก เธอได้แก้ปัญหามนกระดานโดยไม่ใช้แผนภาพ และได้ตั้งสมการโดยกำหนดความยาวเป็น  $x$  (A1 ภาพ 2) เธอได้คำตอบว่า  $x = \frac{5}{3}$  เป็นค่าความยาว แต่จากนั้นเธอก็พยายามจะลบคำตอบดังกล่าวออก เมื่อผู้เขียนถามถึงเหตุผล เธออธิบายว่าค่าที่เป็นเศษส่วนดูไม่สอดคล้องกับลักษณะของโจทย์ปัญหานี้ ประการที่สอง เธอได้ตั้งสมการใหม่อีกครั้ง และได้ค่าความกว้างเป็น จำนวนลบ ณ จุดนั้น เธอเริ่มสงสัยเกี่ยวกับโจทย์ปัญหาเดิม และเริ่ม พิจารณากระบวนการตั้งสมการของตนเองใหม่อีกครั้ง (A2) ประการที่สาม เธอได้กำหนดให้  $x$  เป็นความกว้างแทน แล้วตั้งสมการใหม่อีกครั้ง และได้คำตอบว่า ความกว้างมีค่าเท่ากับ 14 เซนติเมตร (A3)

หลังจากยืนยันคำตอบของเธอแล้ว ผู้เขียนได้ขอให้เธอแก้ปัญหาลักษณะเดียวกันโดยใช้แผนภาพ จากนั้นเธอก็วาดภาพร่างของสถานการณ์ของโจทย์ดังที่แสดงใน ภาพ 2 เมื่อผู้เขียนถามถึง ความสำคัญของภาพวาดดังกล่าว เธอตอบว่า ภาพวาดช่วยให้เธอสามารถ ตั้งสมการได้โดยไม่ต้องมองข้ามค่าสำคัญในโจทย์ เช่น “สองเท่า

(twice)” “เพิ่มเป็นสองเท่า (double)” หรือ “สองเท่า (two times)” ผู้เขียนเห็นด้วยกับคำอธิบายของเธอ โดยกล่าวว่า ภาพวาดดังกล่าวเป็นเพียงภาพร่าง (sketch) และได้อภิปรายต่อไปว่า ภาพลักษณะนี้มักถูกใช้โดยครูในฐานะเครื่องมือช่วยสนับสนุนการเรียนรู้ (scaffolding) เพื่ออธิบายกระบวนการเชิงนิรนัยในการตั้งสมการ จากข้อความโจทย์ปัญหา ในระยะเริ่มต้นของการเรียนรู้การตั้งสมการ นักเรียนมักวาดแผนภาพประกอบ แต่ในระยะต่อมา นักเรียนมักไม่รู้สึกจำเป็นต้องวาดภาพอีกต่อไป เนื่องจากสามารถตั้งสมการหรือคิดได้ด้วยการนิรนัยได้โดยตรงโดยไม่ต้องใช้แผนภาพ ดังนั้น แผนภาพจึงทำหน้าที่หลักในฐานะเครื่องมือช่วยสนับสนุนการเรียนรู้

#### Q4. โจทย์ปัญหา

มีรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ารูปหนึ่งซึ่งด้านยาว ยาวกว่าด้านกว้าง 3 ซม. จากนั้นได้วาดรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าอีกรูปหนึ่ง โดยเพิ่มด้านกว้างเป็นสองเท่า และเพิ่มด้านยาวเป็นสามเท่าของสี่เหลี่ยมผืนผ้ารูปแรก เส้นรอบรูปของสี่เหลี่ยมผืนผ้าใหม่นานกว่าสองเท่าของเส้นรอบรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าเดิมอยู่ 10 ซม. จงหาความยาวเส้นรอบรูปของสี่เหลี่ยมผืนผ้าเดิม

(โจทย์ให้มาเป็นข้อความ: จากการบรรยายของ Hiroshi Nemoto, ผู้ตรวจราชการกระทรวงศึกษาธิการ ประเทศไทยญี่ปุ่น)

A1:

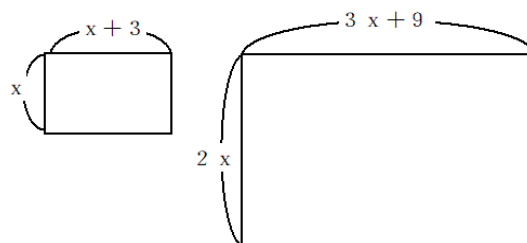
$$\begin{aligned} \text{length } x, \quad \text{width } x - 3 \\ 3x \quad 2(x - 3) \\ 2(3x + 2(x - 3)) = 2(x - 3) + 10 \\ \dots\text{omitted}\dots \\ x = \frac{5}{3} \end{aligned}$$

A2:

$$\begin{aligned} \text{length } x, \quad \text{width } x - 3 \\ 3x \quad 2(x - 3) \\ 2(5x - 3) = 2(2(2x + 3) + 10 \\ \dots\text{omitted}\dots \\ x = 2 \end{aligned}$$

A3:

$$\begin{aligned} \text{length } x + 3, \quad \text{width } x \\ \text{length } 3x + 9, \quad \text{width } 2x \\ 2(5x + 9) = 2(2(2x + 3)) + 10 \\ \dots\text{omitted}\dots \\ x = 2, \text{ width } 2\text{cm, length } 5\text{cm} \\ \text{Answer. } 14\text{cm} \end{aligned}$$

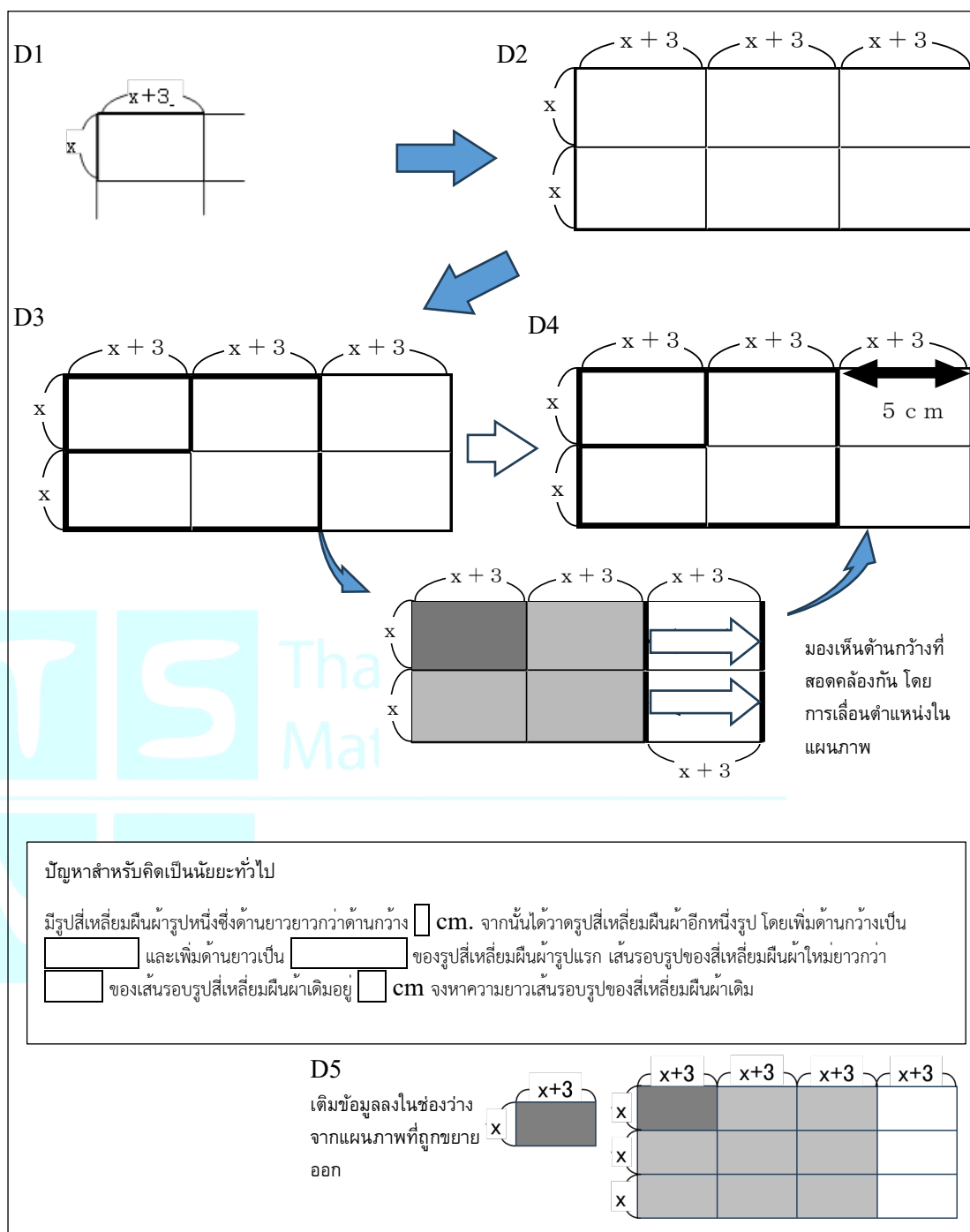


ภาพ 2 คำตอบเป็นเศษส่วนหรือจำนวนลบ?

หลังจากการอภิปราย ผู้เขียนได้ขอให้เธอ แก้ปัญหาอีกครั้ง โดยการวาดแผนภาพที่แสดงแทนความหมายของแต่ละประโยคในโจทย์อย่างตรงไปตรงมา อย่างไรก็ตาม เธอไม่เข้าใจคำสั่งนี้และไม่สามารถ

ดำเนินการต่อไปได้ จากนั้นผู้เขียนจึงแนะนำให้เธอ เริ่มวาดแผนภาพจาก D1 ในภาพ3 สำหรับประโยคแรก  
ของโจทย์ที่ว่า “มีรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ารูปหนึ่งซึ่งมีด้านยาวมากกว่าด้านกว้าง 3 เซนติเมตร” ต่อมาผู้เขียนให้เธอ  
วาดต่อเป็น D2 สำหรับประโยคที่ว่า “รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าใหม่เกิดขึ้นจากการทำให้ด้านกว้างของรูป  
สี่เหลี่ยมผืนผ้าเดิมเป็นสองเท่า และทำให้ด้านยาวเป็นสามเท่า” อย่างไรก็ตาม เธอไม่สามารถดำเนินการต่อไป  
ได้ เมื่อพยายาม ตีความแผนภาพที่เธอวาดขึ้น สำหรับประโยคที่ว่า “เส้นรอบรูปของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ได้ใหม่  
นั้นยาวมากกว่าสองเท่าของเส้นรอบรูปของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าเดิมอยู่ 10 เซนติเมตร” ผู้เขียนจึงถามเพื่อให้เธอ  
ยืนยันว่า รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าใดในแผนภาพที่แสดงถึงการเพิ่มด้านยาวและด้านกว้างเป็นสองเท่าของรูป  
สี่เหลี่ยมผืนผ้าเดิมตามโจทย์ เธอได้ทำเครื่องหมายไว้ที่ D3 แต่ก็ยังไม่สามารถดำเนินการต่อไปได้ จากนั้น  
ผู้เขียนจึงถามว่า ค่าความยาว 10 เซนติเมตรปรากฏอยู่ตรงตำแหน่งใดในแผนภาพ โดยการเลื่อนตำแหน่งของ  
ความกว้างในภาพ เธอจึงสามารถระบุความยาวที่สอดคล้องกันได้ และได้แผนภาพ D4





ภาพ 3 วิธีแก้ปัญหาโดยใช้แผนภาพ

หลังจากการทำกิจกรรมดังกล่าว Masami Isoda ได้สะท้อนการวิเคราะห์จาก D1 ถึง D4 และตั้งคำถามเพิ่มเติมเกี่ยวกับ ความสำคัญของการวาดแผนภาพ เธอได้สังเกตว่า โจทย์ปัญหานี้สามารถแก้ได้ไม่เพียงแต่ด้วยสมการเท่านั้น แต่ยังสามารถแก้ได้ด้วยแผนภาพอีกด้วย และผู้เขียนได้ชี้แนะว่า โจทย์ขยาย

(extended problems) ที่ปรากฏในภาพ 3 สามารถพัฒนาได้ง่ายยิ่งขึ้น หากเราเข้าใจ โครงสร้างของโจทย์ ปัญหาผ่าน D4 และความสอดคล้องระหว่างองค์ประกอบต่าง ๆ

ใน โจทย์สำหรับการทำให้เป็นนัยทั่วไป (Problem' for Generalization) ที่แสดงในภาพ 3 หากเรา แทนค่าตัวเลขที่แตกต่างกันลงในช่องว่าง เราก็สามารถสร้าง โจทย์ปัญหาใหม่ ขึ้นได้ อย่างไรก็ตาม เราไม่สามารถมั่นใจได้ว่าโจทย์ปัญหาเหล่านั้นจะเป็น โจทย์ที่มีโครงสร้างสมบูรณ์ (well-posed) หรือ โจทย์ที่ไม่สมบูรณ์ (ill-posed) จนกว่าจะ ตั้งสมการที่สอดคล้องและแก้สมการนั้น แต่หากเราวาด แผนภาพแบบขยาย (expanded diagram) เช่น D5 โดยใช้แนวคิดจาก D4 เราจะสามารถ ตั้งโจทย์ปัญหาใหม่ที่คำตอบเป็นที่ทราบอยู่แล้ว ได้ ด้วยวิธีนี้ จึงทำให้สามารถเสนอ วิธีแก้ปัญหาลงไปสำหรับโจทย์ประเภทนี้ ซึ่งถูกพัฒนาขึ้น ในลักษณะของ D5 โดยมีพื้นฐานจาก แผนภาพหน่วย (unit diagram) D1 วิธีการแก้ปัญหด้วยแผนภาพที่แสดงในภาพ 3 จึงให้สิ่งที่เรียกว่า ทฤษฎีเฉพาะบริบท (local theory) สำหรับ ชุดของโจทย์ปัญหาที่มีความหมาย แม้ว่าวิธีการแก้ปัญหด้วยสมการพีชคณิตจะมีลักษณะทั่วไป (general) แต่วิธีการแก้ปัญหาลงภาพนี้มีความสำคัญและมีพลังมากกว่าในบริบทเฉพาะของสถานการณ์

### 3-2. แผนภาพเชิงการดำเนินการในฐานะการแสดงแทนทางคณิตศาสตร์ (Operational Diagram as Mathematical Representation)

ตามนิยามของหน่วยของการแสดงแทนทางคณิตศาสตร์ (unit of mathematical representation) (ดูหัวข้อ 2-3) เราสามารถแยกความแตกต่างระหว่างภาพร่าง (sketch) เช่นที่ปรากฏในภาพ 2 ซึ่งทำหน้าที่ช่วยสนับสนุนการ ตั้งสมการจากสถานการณ์ของโจทย์ปัญหา กับแผนภาพในภาพ 3 ซึ่งให้วิธีแก้ปัญหาลงทั่วไปสำหรับโจทย์ประเภทนี้ (เช่น D5) โดย ไม่จำเป็นต้องตั้งสมการ แผนภาพในภาพ 3 สร้างเป็นลำดับของแผนภาพ (sequence) ที่มีวัตถุประสงค์ (objective) เพื่อแก้ปัญหาลงด้วยแผนภาพ โดยการจัดวางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าหนึ่งหน่วย (unit rectangle) ซึ่งทำหน้าที่เป็นสัญลักษณ์ที่เป็นจุดเน้น (focused symbol) เพื่อสร้างรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าอื่น ๆ และโดยการเลื่อนตำแหน่งของความกว้างหรือความยาวไปยังตำแหน่งที่สอดคล้องกัน ซึ่งทำหน้าที่เป็น การดำเนินการที่เป็นจุดเน้น (focused operation) ผ่านองค์ประกอบของวัตถุประสงค์ สัญลักษณ์ที่เป็นจุดเน้น และการดำเนินการที่เป็นจุดเน้นนี้ ลำดับของแผนภาพจึงประกอบกันเป็นหน่วยของการแสดงแทนทางคณิตศาสตร์

ในทางตรงกันข้าม ภาพร่างในภาพ 2 ไม่ได้ถูกออกแบบให้เป็นวัตถุของการดำเนินการ (object of operation) จึงไม่จำเป็นสำหรับกระบวนการแก้ปัญหาลง ที่จริงแล้วนักเรียนได้คำตอบที่ถูกต้องในภาพ 2 ก่อนที่จะวาดภาพ ซึ่งแสดงให้เห็นว่านักเรียนมีประสบการณ์ในการแก้ปัญหาลงด้วยสมการโดยไม่ใช้แผนภาพมาก่อน

บนพื้นฐานดังกล่าว เราจึงนิยามแผนภาพประเภทนี้ที่ทำหน้าที่เป็นการแสดงแทนทางคณิตศาสตร์ว่าเป็นแผนภาพเชิงปฏิบัติการ (operational diagrams)

แผนภาพเชิงปฏิบัติการ (Operational diagram) เป็นแผนภาพที่มีการดำเนินการหรือการจัดการ (operations/manipulations) เพื่อเปลี่ยนแปลงแผนภาพ (ในฐานะสัญลักษณ์) กล่าวคือโจทย์ปัญหาสามารถแก้ได้ผ่านการดำเนินการบนแผนภาพเชิงปฏิบัติการ ในภาพ 3 ลูกศร แสดงถึงการดำเนินการที่ทำให้แผนภาพเปลี่ยนแปลง ซึ่งสะท้อนกระบวนการคิดที่ละเอียดขั้นตอน แผนภาพเชิงปฏิบัติการจึงแตกต่างจากแผนภาพธรรมดาที่ครูใช้เพียงเพื่อการอธิบายหรือเป็นเครื่องมือช่วยสนับสนุนการเรียนรู้ (scaffolding) แผนภาพเชิงปฏิบัติการมีกฎเกณฑ์ของการวาด (rules of drawing) ซึ่งทำหน้าที่กำหนดการดำเนินการสำหรับการเปลี่ยนแปลงแผนภาพ และนักเรียนสามารถนำการดำเนินการเหล่านี้ไปใช้เพื่อประมวลผลวัตถุประสงค์เฉพาะในการแก้ปัญหา

#### 4. แนวคิดทางคณิตศาสตร์ที่ทำให้มองสิ่งหนึ่งเป็นสิ่งที่ได้สิ่งหนึ่ง

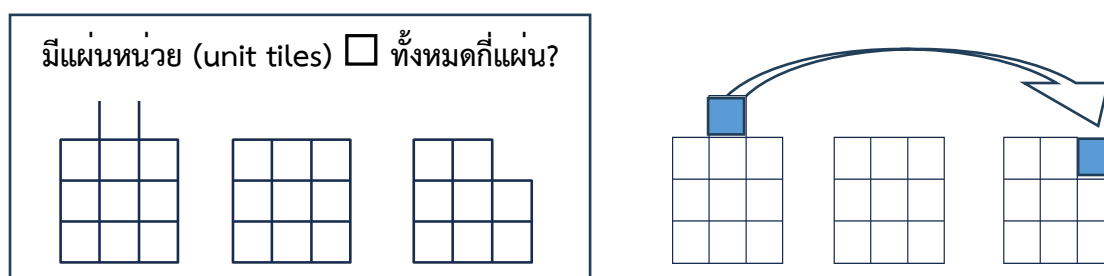
##### (The Mathematical ideas to See it As)

หน่วยของการแสดงแทนทางคณิตศาสตร์ (Unit of Mathematical Representations) ถูกนิยามว่าเป็น การแสดงแทนแบบลำดับ (sequential representation) ซึ่งมีลักษณะเฉพาะคือประกอบด้วยวัตถุประสงค์ (Objective) สัญลักษณ์ที่เป็นจุดเน้น (Focused Symbols) และ การดำเนินการ (Operations) วัตถุประสงค์ทำหน้าที่กำหนดจุดเน้นในการตีความสำหรับวิธีที่เราจะมองเห็นการแสดงแทนนั้น แนวคิดทางคณิตศาสตร์เป็นแหล่งกำเนิดของวัตถุประสงค์ดังกล่าว เพื่ออธิบายว่าเรากำหนดจุดเน้นอย่างไร ในที่นี้เรายืนยันว่า วิธีการมองสิ่งหนึ่งเป็นสิ่งที่ได้สิ่งหนึ่ง (ways to see it as) เป็นเนื้อหาสำคัญของการสอนในหลักสูตรคณิตศาสตร์

##### 4-1. แนวคิดทางคณิตศาสตร์ที่กำหนดวิธีการมอง (Mathematical ideas to fix the way to see)

ในภาพ 4 มีสามวิธีในการหาคำตอบว่าเป็น 27 แผ่นกระเบื้อง (tiles) วิธีแรกคือการนับทั้งหมดโดยมองแต่ละแผ่นกระเบื้องแยกจากกันอย่างอิสระ วิธีที่สองคือการบวก เช่น  $10 + 9 + 8$  โดยมองเห็นกระเบื้องเป็นสามกลุ่มที่แตกต่างกัน และวิธีที่สามคือการคูณ  $3 \times 9$  โดยย้ายกระเบื้องแผ่นบนของกลุ่มด้านซ้ายไปยังกลุ่มด้านขวา ในกรณีนี้ กระเบื้องในภาพ 4 จึงกลายเป็นสื่อวัตถุที่จัดกระทำได้ (manipulative) ซึ่งไปไกลกว่าการเป็นเพียงแผนภาพที่คงที่ ลองพิจารณาว่านี่เป็น แผนภาพเชิงดำเนินการ (operational diagram) หรือไม่ ในการมองภาพ 4 ผ่านการคูณ เราควรพัฒนาผู้เรียนให้ต้องการใช้การคูณ โดยมีแนวคิดในการมองจำนวนใด ๆ ให้เป็น "หน่วยใหม่" สำหรับการนับ (หรือหน่วยของการวัด) เพื่อให้เกิดแนวคิดดังกล่าว ผู้เรียนจำเป็นต้องเรียนรู้ความหมายของการคูณในฐานะการหาปริมาณรวมจากจำนวนเท่าของหน่วยที่กำหนดไว้ (นิยามของการ

คุณ ดู Isoda & Olfos, 2021) และสามารถมอง "9" เป็นหนึ่งหน่วยของการขยาย (unit of scaling) พร้อมทั้งต้องการนำแถวของ 9 ในตารางการคูณ ซึ่งได้ท่องจำไว้แล้วมาใช้ในการคำนวณ ในกรณีนี้ วัตถุประสงค์ของการแสดงแทน (objective of representation) คือ การกำหนดหน่วยสำหรับการนับใหม่เพื่อให้สามารถใช้การคูณได้ สัญลักษณ์ที่เป็นจุดเน้น (focused symbols) คือแผ่นหน่วย (tiles) จำนวน 9 แผ่นที่อยู่ตรงกลาง และการกระทำที่เป็นจุดเน้น (focusing operation) คือ การทำให้เกิดกลุ่มจำนวน 9 โดยย้ายแผ่นหน่วย 1 แผ่นจากด้านซ้ายไปยังด้านขวา



ภาพ 4 Isoda & Olfos, 2021, pp.124-126

Isoda และ Olfos (2021) แสดงให้เห็นว่า นักเรียนสามารถ เปลี่ยนวิธีการมองเห็นรูป (ways to see the figure) สำหรับคำถามประเภทเดียวกันคือ “มีกี่ชิ้น” (how-many question) ผ่านการเรียนรู้ การบวก และการคูณ ตั้งแต่ชั้นประถมศึกษาปีที่หนึ่งถึงปีที่สาม ในกรณีของประเทศญี่ปุ่น การอธิบายดังกล่าวชี้ให้เห็นว่า เมื่อเราสอนความรู้และทักษะทางคณิตศาสตร์ เราควรสอนแนวคิดทางคณิตศาสตร์ (mathematical ideas) ไปพร้อมกันด้วย เนื่องจากแนวคิดเหล่านี้ประกอบด้วยวิธีการมองโลกที่ช่วยให้สามารถใช้ความรู้ที่เกี่ยวข้องได้อย่างมีความหมาย เนื่องจากการแสดงแทนทางคณิตศาสตร์ (mathematical representation) เป็นสิ่งที่แสดงถึงแนวคิดทางคณิตศาสตร์ จากมุมมองของแนวคิดทางคณิตศาสตร์ จึงสามารถกล่าวได้ในเชิงตรรกะว่า แนวคิดทางคณิตศาสตร์เป็นแหล่งกำเนิดของวัตถุประสงค์ (objective) ของการแสดงแทนทางคณิตศาสตร์ ซึ่งกำหนดวิธีการมองเห็น สัญลักษณ์ (symbols) และ การดำเนินการ (operations) ในภาพ 4 เพื่อที่จะใช้การคูณ นักเรียนจำเป็นต้องมีแนวคิดของการคูณที่ทำให้สามารถมองจำนวนใด ๆ เป็นหน่วยสำหรับการนับ (unit for counting) ได้

#### 4-2. กรอบความคิดทางคณิตศาสตร์ในหลักสูตรเพื่อ “มองเห็นสิ่งหนึ่งเป็นสิ่งที่ใดสิ่งหนึ่ง”

ในภาพ 5 กรอบหลักสูตรของ มาตรฐานการศึกษาขั้นพื้นฐานเอเชียตะวันออกเฉียงใต้ ซึ่งพัฒนาโดย SEAMEO Regional Centre for QITEP in Mathematics ประกอบด้วยองค์ประกอบสามส่วน ได้แก่ I) คุณค่า เจตคติ และนิสัย (Value, Attitude, and Habit) II) แนวคิด วิธีคิด และกิจกรรม (Ideas, Ways of

Thinking and Activities) III) เนื้อหา (Contents) (Masami Isoda, Teh Keng Seng และ Gan Chee Keong, 2024) องค์ประกอบทุกส่วนใน I) และ II) ถูกเติมเต็มด้วย คำศัพท์ตัวอย่าง ซึ่งสามารถแทนที่ด้วยคำหรือประโยคที่สอดคล้องกับบริบท และมีความหมายและเข้าใจได้ในสถานการณ์จริง กรอบดังกล่าวแสดงให้เห็น ขั้นตอนต่าง ๆ ของวัตถุประสงค์ของการสอนคณิตศาสตร์ในแต่ละชั้นเรียน มาตรฐานแต่ละข้อในส่วน III) ระบุเนื้อหาเฉพาะของการสอนตามลำดับของหลักสูตร ในรายวิชานั้น ซึ่งในที่นี้คือคณิตศาสตร์ องค์ประกอบใน I) และ II) เป็น เนื้อหาทั่วไปของการสอนที่สามารถประยุกต์ใช้กับวิชาอื่น ๆ ได้ ไม่จำกัดเฉพาะคณิตศาสตร์ トラบเท่าที่มีการปรับคำให้สอดคล้องกับเนื้อหาของวิชานั้น ตัวอย่างเช่น ความสวยงาม (beautiffulness) ใน ฐานะคุณค่า การตั้งคำถาม (pose question) ในฐานะเจตคติ เซต (set) ในฐานะแนวคิด และการอุปนัย (inductive) ในฐานะวิธีคิด คำเหล่านี้สามารถสอนได้ในหลายวิชา อย่างไรก็ตาม เมื่อกำหนด เนื้อหาเฉพาะของวิชา เข้าไป คำเหล่านี้ก็จะมี ความหมายเฉพาะเจาะจงมากขึ้นภายในวิชานั้น องค์ประกอบใน I) และ II) สามารถเรียนรู้ได้เมื่อมี กระบวนการเรียนรู้ที่เหมาะสมสำหรับเนื้อหาเฉพาะในส่วน III) ซึ่งกระบวนการที่เหมาะสมดังกล่าวรวมถึง การสะท้อนคิด (reflection) และ การชื่นชมคุณค่า (appreciation) เนื่องจาก I) และ II) เป็น วัตถุประสงค์ทั่วไปสำหรับทุกวิชา จึงสามารถมองได้ว่าเป็นวัตถุประสงค์เพื่อการพัฒนาลักษณะนิสัยของมนุษย์ (human character formation) คณิตศาสตร์ศึกษาจึงเป็นวิชาที่มีบทบาทในการพัฒนา ลักษณะนิสัยของมนุษย์ในส่วน I) และ II) ผ่าน เนื้อหาเฉพาะของคณิตศาสตร์ในส่วน III)

### คุณค่า เจตคติและอุปนิสัยทางคณิตศาสตร์เพื่อคุณลักษณะความเป็นมนุษย์

#### คุณค่าทางคณิตศาสตร์

##### แสวงหา-

- ความเป็นทั่วไปและการขยายต่อยอด
- ความสมเหตุสมผลและความกลมกลืน
- ประโยชน์ใช้งานและประสิทธิภาพ
- ความเรียบง่ายและง่ายต่อการเข้าใจ
- ความงดงาม

#### เจตคติทางคณิตศาสตร์

##### การพยายามที่จะ-

- มองและคิดอย่างเป็นคณิตศาสตร์
- ตั้งคำถามและพัฒนาคำอธิบาย
- สร้างข้อสรุปทั่วไปและขยายต่อยอด
- เห็นคุณค่าในความคิดของผู้อื่น และปรับเปลี่ยนรูปแบบการแทนความหมายเพื่อพัฒนาการอภิปรายผ่านการโต้ตอบเชิงวิภาษ
- วิเคราะห์กระบวนการเพื่อการวางแผน

#### อุปนิสัยการคิดทางคณิตศาสตร์

##### เพื่อการดำรงชีวิต-

- มีเหตุผลและคิดเชิงวิภาษฯ พร้อมทั้งเคารพและเห็นคุณค่าผู้อื่น
- ดำเนินชีวิตได้อย่างอิสระและอยู่ร่วมกับสังคมได้
- มีความคิดสร้างสรรค์ นวัตกรรม และอยู่ร่วมกันอย่างกลมกลืนเพื่อพัฒนาความเป็นพลเมือง
- ใช้เครื่องมือที่หลากหลายอย่างมีวิจารณญาณ
- มีพลังในการคาดการณ์อนาคตผ่านการเรียนรู้ตลอดชีวิต

### การคิดและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

#### แนวคิดทางคณิตศาสตร์ของ:

เซต หน่วย การเปรียบเทียบ  
การดำเนินการ (Operation) ขั้นตอนวิธี  
หลักการพื้นฐาน  
ความคงรูป  
การแสดงแทนและการแปลงรูปแบบที่  
หลากหลาย  
แบบรูป การเวียนเกิดซ้ำ และสิ่งคงตัว  
การจัดลำดับ  
ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุด  
สมมาตร

#### วิธีคิดทางคณิตศาสตร์

- การสรุปทั่วไปและการพิจารณากรณีเฉพาะ
- การขยายและการบูรณาการ
- การให้เหตุผลแบบอุปนัย อุปมาอุปไมย และนิรนัย
- การทำให้เป็นนามธรรม การทำให้เป็นรูปธรรม และการทำให้แนวคิดปรากฏเป็นรูปแบบที่รับรู้ได้
- การทำให้เป็นวัตถุวิสัยผ่านการแสดงแทนและการใช้สัญลักษณ์
- การคิดเชิงความสัมพันธ์และเชิงฟังก์ชัน
- การคิดไปข้างหน้าและย้อนกลับ

#### กิจกรรมทางคณิตศาสตร์

- การแก้ปัญหา
- การสำรวจและการสืบเสาะ
- การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ การทำให้เป็นคณิตศาสตร์ และการจัดระบบ
- การเขียนโปรแกรม
- การตั้งข้อคาดการณ์ การให้เหตุผล และการพิสูจน์
- การสร้างโมเดลและการพัฒนาทักษะเชิงกระบวนการ
- การแสดงแทนและการแลกเปลี่ยน

### เนื้อหาสาระ

#### ช่วงชั้นที่ 1

- จำนวนและการดำเนินการ
- ปริมาณและการวัด
- รูปร่าง รูปเรขาคณิต และทรงสามมิติ
- แบบรูป ข้อมูล และการนำเสนอ

#### ช่วงชั้นที่ 2

- การขยายแนวคิดเรื่องจำนวนและการดำเนินการ
- การวัดและความสัมพันธ์
- รูปเรขาคณิตสองมิติและสามมิติ
- การจัดการข้อมูลและกราฟ

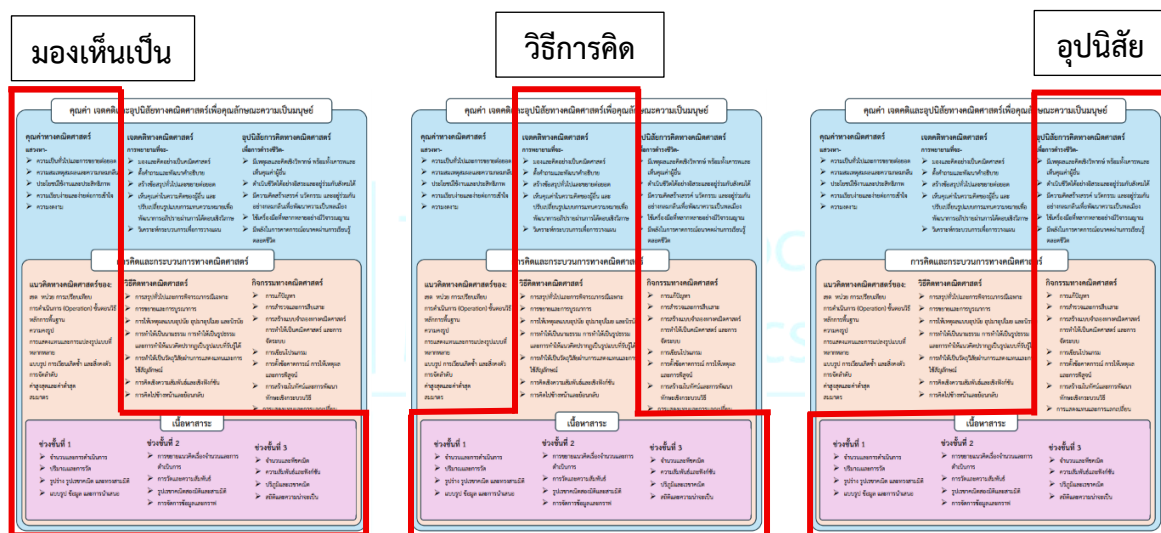
#### ช่วงชั้นที่ 3

- จำนวนและพีชคณิต
- ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน
- ปริภูมิและเรขาคณิต
- สถิติและความน่าจะเป็น

ภาพ 5 กรอบ SEA-BES ฉบับพิมพ์ครั้งที่ 2: กรอบ CCRLS (Isoda, Teh & Gan, 2024, หน้า 8)

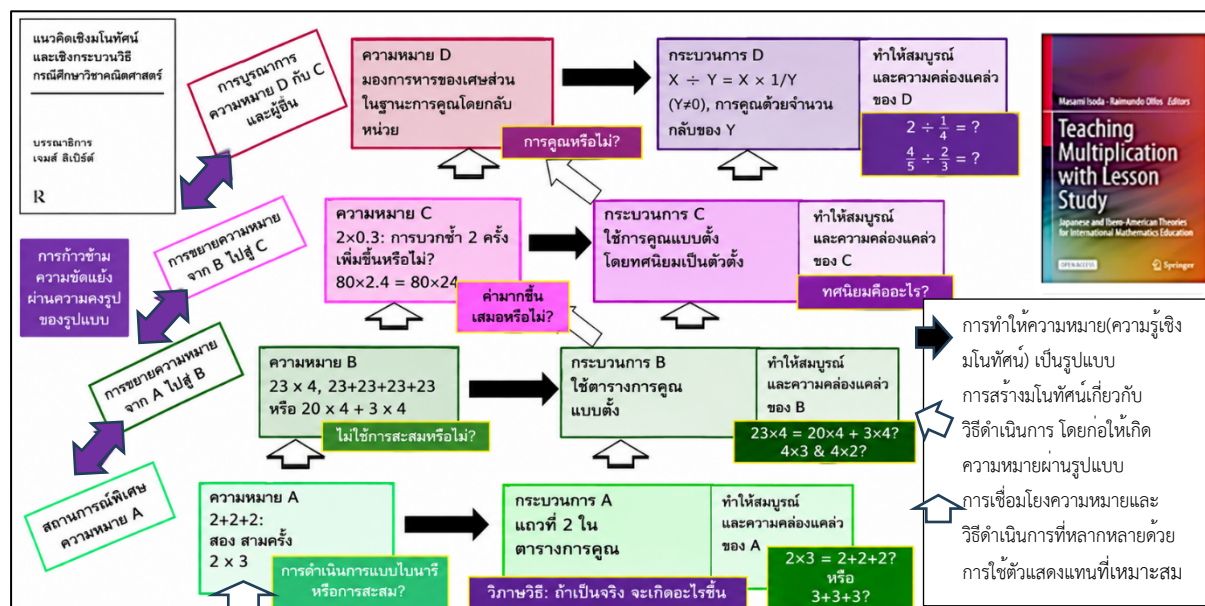
น่าเสียดายที่ ในหลายกรณี ครูมักเขียนวัตถุประสงค์เฉพาะสำหรับเนื้อหาในส่วน III) เท่านั้น และแทบไม่เคยเขียนวัตถุประสงค์สำหรับ ส่วน I) และ II) เลย หากเราละเลยวัตถุประสงค์ของส่วน I) และ II) แบบฝึกหัด

ที่มุ่งเพียง ทักษะในส่วน III) ก็จะดูเหมือนว่าเป็นวิธีการสอนที่ดีที่สุด อย่างไรก็ตาม แม้แต่แบบฝึกหัดสำหรับ ส่วน III) เอง หากครูปิจารณา ส่วน I) และ II) ในฐานะองค์ประกอบของการพัฒนาลักษณะนิสัยของมนุษย์ (human character formation) ก็จะสามารถออกแบบลำดับของโจทย์/ปัญหา (task sequence) ที่เหมาะสมเพื่อพัฒนา I) และ II) ควบคู่ไปกับการฝึกทักษะได้ ในหลักสูตรปัจจุบัน ส่วน I) และ II) มักถูกเรียกว่า สมรรถนะทั่วไป (Generic Competence) ส่วน III) เรียกว่าสมรรถนะเฉพาะ (Specific Competence) แทนที่จะใช้คำว่าความสามารถ (Ability) ทั้งนี้เนื่องจากคำว่า “ความสามารถ” มักแฝงอยู่กับ อุดมการณ์ที่ แบ่งแยกความรู้ตามรายวิชา (subject-segmented ideology) คล้ายกับแนวคิดของครูที่มักเขียน วัตถุประสงค์เฉพาะในส่วน III) เท่านั้น และละเลยการพิจารณา ส่วน I) และ II)



ภาพ 6 คุณค่า แนวคิด และเนื้อหา สำหรับการมองว่าเป็น ดังแผนภาพด้านซ้าย

ใน ภาพ 6 จากมุมมองของ “การมองเห็นสิ่งหนึ่งเป็นอีกสิ่งหนึ่ง (See As)” ทั้ง คุณค่า (values) ใน ส่วน I) และ แนวคิด (ideas) ในส่วน II) ถูกใช้เพื่ออธิบายวิธีการมอง (ways to see) ทั้งสองส่วนนี้จึงเป็น สมรรถนะทั่วไป (Generic Competence) สำหรับการ “มองเห็นสิ่งหนึ่งเป็นสิ่งใดสิ่งหนึ่ง” ในความสัมพันธ์กับ เนื้อหา (content) ซึ่งเป็น สมรรถนะเฉพาะ (specific competence) จะมี แนวคิดเฉพาะของเนื้อหา (content-specified ideas) สำหรับการมองเห็นสิ่งนั้นเป็นอย่างใดอย่างหนึ่ง ดังที่อธิบายไว้ในหัวข้อ 4-1 แนวคิดเฉพาะของเนื้อหาเหล่านี้ ซึ่งก่อให้เกิดวิธีการมองนั้น จะทำหน้าที่ได้อย่างจำกัดภายใน ทฤษฎีเฉพาะ บริบท (local theory) ที่ทำให้การใช้แนวคิดเหล่านั้นเป็นไปได้ ภาพ 7 แสดงลำดับของหลักสูตร



ภาพ 7 ลำดับของทฤษฎีเฉพาะบริบทผ่านการขยาย (extensions) (Isoda, Olfo, 2021. p.8, revised)

สำหรับการคูณ ซึ่งสะท้อนให้เห็นการพัฒนาอย่างต่อเนื่อง แต่ละช่องแสดงถึง ทฤษฎีเฉพาะบริบท (local theory) ที่ทำงานได้อย่างเฉพาะเจาะจงโดยไม่เกิดความขัดแย้งภายในตัวเอง อย่างไรก็ตาม อาจเกิด ความขัดแย้งระหว่างทฤษฎีเฉพาะบริบทหนึ่งกับทฤษฎีถัดไป ช่องย่อยในแต่ละทฤษฎีเฉพาะบริบทแสดงตัวอย่างของ ความขัดแย้งที่นักเรียนอาจสับสนหรือรู้สึกแปลกประหลาด

ภาพ 5 เป็นกรอบหลักสูตรที่ใช้เพื่ออธิบาย มาตรฐาน (Standards) ซึ่งสามารถนำมาใช้เพื่ออธิบาย วัตถุประสงค์และลำดับการสอนในแต่ละชั้นเรียน กรอบดังกล่าวเป็นชุดคำศัพท์ที่ใช้ในการปฏิบัติของการศึกษา ชั้นเรียน (Lesson Study) เพื่ออธิบายกิจกรรมและความเข้าใจของนักเรียน ในคำศัพท์แบบดั้งเดิมที่ใช้เพื่อ อธิบายกระบวนการเชิงการรู้ (cognitive process) ตั้งแต่ช่วงทศวรรษ 1980 เป็นต้นมา มักใช้คำว่า belief (ความเชื่อ) เพื่ออธิบายแหล่งกำเนิดของมุมมองของนักเรียนแต่ละคน หรือวิธีการมอง (ways to see) ซึ่ง เกิดขึ้นในชั้นเรียน และผู้สังเกตการณ์จะอธิบายการมีอยู่ของ belief ของนักเรียน (ดูตัวอย่างเช่น García และ Dolores, 2021) ในการอธิบายวิธีการมองเห็น (ways to see) ความแตกต่างสำคัญระหว่าง กรอบหลักสูตรใน ภาพ 5 กับความเชื่อในการวิเคราะห์เชิงการรู้ ภาพ 6 คือแหล่งที่มาของวิธีการมองเห็นนั้นถูกอธิบายโดยการ เรียนรู้ในอดีต หรือสิ่งที่นักเรียนได้เรียนรู้มาก่อนในลำดับของหลักสูตร (curriculum sequence) แทนที่ งานวิจัยเชิงการรู้ (cognitive research) จะเริ่มต้นจากการสังเกตการณ์และการอภิปรายเกี่ยวกับการเกิดขึ้น ของความเชื่อ หลักสูตรกลับให้ ลำดับวัตถุประสงค์สำหรับการสอนไว้ล่วงหน้า ครูจึงสามารถคาดการณ์มุมมอง

ของนักเรียนหรือวิธีการมองได้ก่อนการสอน โดยตั้งสมมติฐานจากสิ่งที่นักเรียนเคยเรียนรู้มาแล้ว หรือสิ่งที่ครูได้สอนไปก่อนหน้านี้ และครูก็พยายามพัฒนานักเรียนให้สามารถมองสิ่งต่างๆ ได้ในวิธีที่ก้าวหน้ามากยิ่งขึ้น

## 5. การประยุกต์ใช้กับการวิเคราะห์แบบเรียน

ในทางประวัติศาสตร์ ก่อนการเกิดขึ้นของการแสดงแทนเชิงพีชคณิต ปัญหาคณิตศาสตร์หลายประเภทได้ถูกแก้ด้วยการแสดงแทนเชิงรูปภาพ (figural representations) มาตั้งแต่สมัยโบราณทั้งในโลกตะวันออกและตะวันตก

### 5-1. ตัวอย่างทางประวัติศาสตร์

ในโลกตะวันตก หนังสือ Elements ของ Euclid (คริสต์ศตวรรษที่ 3 ก่อนคริสตกาล) และ Conic Sections ของ Apollonius of Perga (คริสต์ศตวรรษที่ 3 ก่อนคริสตกาล) ใช้ การแสดงแทนเชิงรูปภาพ ซึ่งนักประวัติศาสตร์เรียกว่า “พีชคณิตเชิงเรขาคณิต (geometric algebra) ในโลกตะวันออก หนังสือ Nine Chapters on the Mathematical Art (Jiǔ Zhāng Suàn Shù, ศตวรรษที่ 1 ก่อนคริสตกาล – ศตวรรษที่ 2 หลังคริสตกาล; ฉบับเรียบเรียงโดย Liu Hui ในปี ค.ศ. 263) และ Sunzi Suanjing (คริสต์ศตวรรษที่ 5–6) ได้จัดหมวดหมู่ปัญหาตาม สมการ แต่แก้ปัญหาโดยใช้ กระดานคำนวณ (calculation boards)

ในที่นี้ เราจะวิเคราะห์ปัญหา (tasks) ที่ปรากฏในภาพ 8 จากแบบเรียนคณิตศาสตร์ระดับประถมศึกษาปีที่ 5 ของญี่ปุ่น (Monbusho, 1939, หน้า 71–72) ซึ่งสะท้อนอิทธิพลของแบบแผนทางคณิตตะวันออกอย่างชัดเจน เนื่องจากข้อจำกัดด้านการพิมพ์ แบบเรียนเล่มนี้ถูกจัดพิมพ์ในขนาด B6 (เส้นทแยงมุม 22 ซม.) ทำให้มีพื้นที่สำหรับแผนภาพค่อนข้างจำกัด ปัญหาที่ 1 ไม่มีแผนภาพ ซึ่งชี้ให้เห็นถึงการแก้ปัญหาด้วยสมการ อย่างไรก็ตาม ปัญหานี้ก็สามารถแก้ได้ด้วยแผนภาพพื้นที่ (area diagram) เช่นกัน ปัญหาที่ 2 แก้ปัญหาผ่านการแปลงพื้นที่ที่สมมูล (equivalent area transformation) ปัญหาที่ 3 เป็นปัญหาแบบเปิด (open task) ซึ่งเชิญชวนให้นักเรียนนำการดำเนินการบนแผนภาพพื้นที่ไปประยุกต์ใช้

### 5-2. การวิเคราะห์ลำดับของโจทย์/ปัญหา จากมุมมองของการแสดงแทนทางคณิตศาสตร์

(Analysis of Task Sequence from the perspective of Mathematical Representations)

ในที่นี้ ลำดับของโจทย์ถูกวิเคราะห์จากมุมมองของ วัตถุประสงค์ (objective) สัญลักษณ์ที่เป็นจุดเน้น (focused symbol) และการดำเนินการที่เป็นจุดเน้น (focused operations) ในลำดับที่แสดงในภาพ 8 แผนภาพพื้นที่ทำหน้าที่เป็น แผนภาพเชิงดำเนินการ (operational diagrams) โดยมีการดำเนินการที่เป็นจุดเน้น ได้แก่: (i) สูตรพื้นที่ของสี่เหลี่ยมผืนผ้า (ii) การคงอยู่ของพื้นที่ผ่านการแยกและการประกอบ (decomposition and composition) (iii) การแปลงรูปที่คงพื้นที่ (area-preserving transformation)

### ปัญหาที่ 1

ค่าจ้างรายวันของช่างฝีมือคือ 2.50 เยน

ถ้าทำงานล่วงเวลา ค่าจ้างรายวันจะเพิ่มขึ้นวันละ 0.75 เยน

ในเดือนกุมภาพันธ์ เขาหยุดงาน 4 วัน และได้รับค่าจ้างรวม 69 เยน จงหาว่า  
เขาทำงานล่วงเวลากี่วัน

### ปัญหาที่ 2

ที่ดินด้านขวาเมื่อไม่สะดวกที่จะสร้างบ้านสองหลัง ดังนั้นเพื่อพัฒนาที่อยู่อาศัย  
พวกเขาจึงหารือกันเพื่อเปลี่ยนเขตแดนให้ง่ายขึ้น  
เพื่อความสะดวกในการก่อสร้าง ควรปรับเปลี่ยนเขตแดนอย่างไร

### ปัญหาที่ 3

แผนที่ด้านขวาแสดงสภาพแวดล้อมของโรงเรียนในปัจจุบัน  
ขณะนี้คณะกรรมการของเมืองตัดสินใจปรับปรุงอาคารเรียนใหม่  
ท่านจะวางแผนอาคารใหม่อย่างไร และจะจัดการการก่อสร้าง  
โดยไม่ต้องปิดการเรียนการสอนอย่างไร

วิธีการแก้ปัญหาด้วยพีชคณิต ของปัญหาที่ 1

ถ้าวันที่ทำงานนอกเวลาเป็น  $x$

$$(2.5 + 0.75)x + 2.5((28 - 4) - x) = 69$$

is deduced.

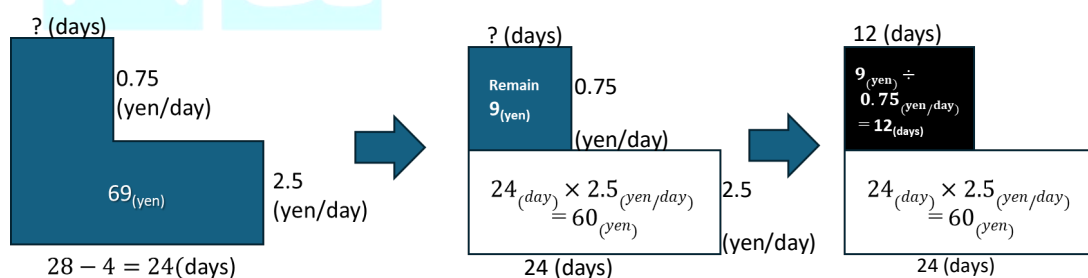
$$3.25x + 2.5 \times 24 - 2.5x = 69$$

$$0.75x = 9$$

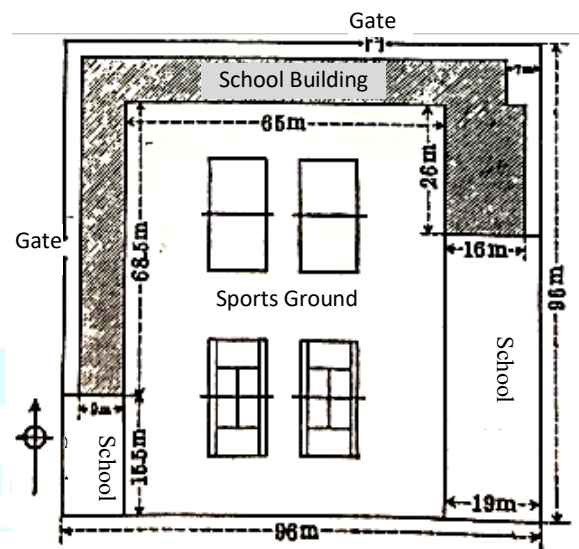
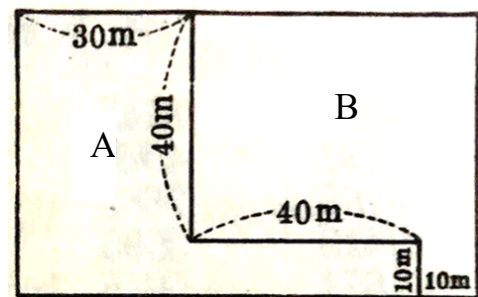
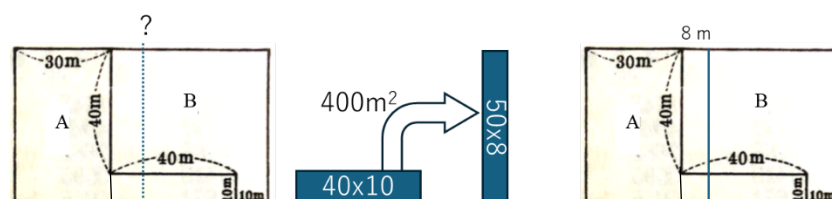
$$x = 9 \div 0.75 = 12$$

Ans. 12 days

วิธีแก้ปัญหาด้วยภาพของปัญหาที่ 1

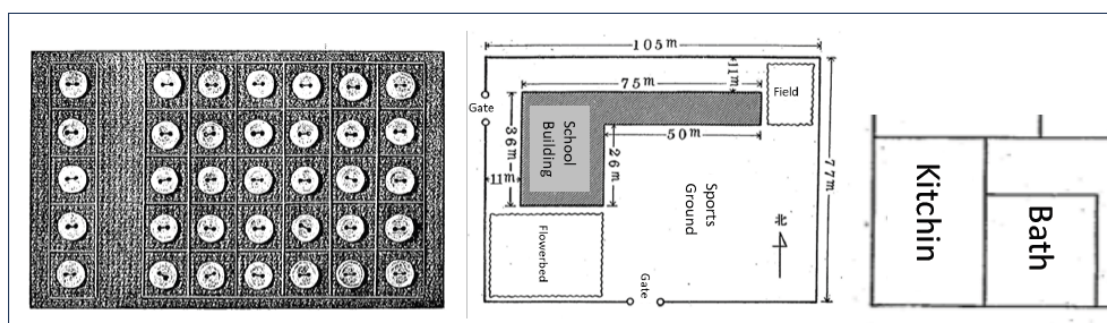


วิธีแก้ปัญหาด้วยภาพของปัญหาที่ 2



ระหว่าง ปัญหาที่ 1 และ ปัญหาที่ 2 ยังมีปัญหาอีกสองข้อที่ไม่มีแผนภาพ ซึ่งเป็นการขยายปัญหาที่ 1 โดยการนำ อัตราส่วน (ratio) เข้ามาเกี่ยวข้องกับรูปทรงตัว L (L-Shaped) ในภาพ 8 ซึ่งในโลกตะวันตกเรียกว่า gnomon และในคัมภีร์จีนโบราณ Zhoubi Suanjing (ศตวรรษที่ 2 ก่อนคริสตกาล) เรียกว่า ‘biǎo’ ใช้เพื่อแสดงการคงอยู่ของพื้นที่ ในปัญหาที่ 2 โดยเฉพาะอย่างยิ่งรูปนี้แสดงการคูณของความยาวและความกว้าง (ด้านทั้งสองของสี่เหลี่ยมผืนผ้า) ในที่นี้ สูตรพื้นที่ถูกแสดงในรูปของ การคูณของปริมาณเดียวกัน ‘m’ ซึ่งให้พื้นที่เป็น  $m^2$

ในทางตรงกันข้าม แผนภาพพื้นที่ในปัญหาที่ 1 ไม่ได้แสดงพื้นที่ แต่ใช้เพื่ออธิบายนิยามของการคูณในบริบทของสถานการณ์ กล่าวคือ  $24 \text{ (วัน)} \times 2.5 \text{ (เงิน/วัน)} = 60 \text{ (เงิน)}$  การวาดแผนภาพลักษณะนี้ยากกว่าในปัญหาที่ 2 เพราะไม่ได้เป็นเพียงการประยุกต์ใช้สูตรพื้นที่โดยตรง ในความเป็นจริง ปัญหาที่ 1 สามารถแก้ได้โดยไม่ต้องใช้แผนภาพ ผ่านการให้เหตุผลเชิงสมมติฐานเช่น “ถ้าพวกเขาไม่ได้ทำงานล่วงเวลา” ดังนั้น วัตถุประสงค์ของปัญหาที่ 1 อาจเป็นการสอนการให้เหตุผลเชิงสมมติฐาน (hypothetical reasoning) ซึ่งเป็นการสำรวจคำถามประเภท “ถ้าหากว่า...” และ “ถ้าหากว่าไม่” หากปัญหาที่ 1 ถูกแก้ด้วยแผนภาพ ปัญหาที่มีลักษณะคล้ายกันซึ่ง ไม่สามารถใช้พื้นที่ได้โดยตรง ก็ควรได้รับการแก้ด้วยแผนภาพมาก่อน อย่างไรก็ตาม ผู้เขียนไม่พบแผนภาพลักษณะดังกล่าวในหน้าก่อนหน้า แต่พบตัวอย่างใน ภาพ 9 โดยเฉพาะอย่างยิ่ง การคูณถูกนิยามในบริบทของสถานการณ์ผ่านการใช้ หลายเท่า (multiple) เช่น 6 เท่าของกระดุม 5 เม็ด (ภาพ 9 ด้านซ้าย)



ภาพ 9

Left: Grade 2 V.1 Multiplication (Monbusyo, 1936, p.50)

Middle: Grade 3 V.2 Parameter (Monbusyo, 1937, p.23)

Right: Grade 5 V.1 Area (Monbusyo, 1939, p.52)

หากถือว่าลำดับของปัญหาเป็นไปตามที่กำหนดไว้ ปัญหาที่ 1 สามารถนำกลับมาพิจารณาอีกครั้ง หลังจากปัญหาที่ 2 โดยมีวัตถุประสงค์ใหม่ คือ การแนะนำรูปตัว L ให้เป็นแผนภาพแสดงการดำเนินการ (operational diagram) (รูปที่ 8) เพื่อใช้เป็นภาพแทนของการให้เหตุผลเชิงสมมติฐาน (hypothetical reasoning) กล่าวอีกนัยหนึ่ง การสลับลำดับ โดยจัดให้ปัญหาที่ 2 มาก่อนปัญหาที่ 1 อาจช่วยให้สามารถขยาย

แนวคิดจากแผนภาพพื้นที่ (area diagram) ไปสู่คำนิยามของการคูณได้ง่ายยิ่งขึ้น และช่วยให้ผู้เรียนสร้างความคิดรวบยอดของสูตรการหาพื้นที่ขึ้นใหม่ โดยพิจารณาจากมุมมองของการได้มาซึ่งสูตร (derivation)

อย่างไรก็ตาม อาจเป็นการเหมาะสมเช่นกันที่ ปัญหาที่ 2 จะมาก่อนปัญหาที่ 3 เนื่องจากปัญหาที่ 3 ขอให้เรียนตั้งคำถามใหม่บนพื้นฐานของแนวคิดเรื่องการคงอยู่ของพื้นที่ที่ได้อภิปรายไว้ในปัญหาที่ 2

## 6. ทฤษฎีการแสดงแทนทางคณิตศาสตร์ (ส่วนที่ 2)

หากเปรียบเทียบการอภิปรายเกี่ยวกับ ไดอะแกรมเชิงปฏิบัติการ (operational diagram) ในภาพ 3 และวิธีการแก้ปัญหของปัญหาที่ 1 ในภาพ 8 จะพบว่าวิธีการแก้ปัญหของปัญหาที่ 2 มีการใช้การแสดงแทนด้วยพีชคณิต (algebraic representation) และยังมีปัญหาในประเด็นการอ่านไดอะแกรม ดังนั้นจึงมีการเสนอแนวคิด การแปลระหว่างการแสดงแทนทางคณิตศาสตร์ทั้งสองเพื่อใช้ในการตีความ

### 6-1. การทำให้เป็นระบบทฤษฎี (Formalization of Theory)

หน่วยหนึ่งของ การแสดงแทนทางคณิตศาสตร์ (mathematical representation) ในฐานะเซตเฉพาะของรูปแบบที่มีลำดับขั้น (sequential forms) สามารถนิยามได้โดย วัตถุประสงค์ (Objective: Ob), สัญลักษณ์ที่มุ่งเน้น (Focused Symbols: S) และ การดำเนินการที่มุ่งเน้น (Focused Operations: Op) หน่วยดังกล่าวแสดงเป็น  $R(S, Op)$  with Ob ในปัญหาที่ 1 (ภาพ 4) มี 3 วิธีการที่แตกต่างกัน ได้แก่: วิธีการแก้ปัญหด้วยสมการ (Equation-based solution): สถานการณ์ปัญหาดังกล่าวสามารถแก้ได้ด้วยการกำหนดตัวแปร  $x$  และหาค่าของมัน วัตถุประสงค์คือ Obx สัญลักษณ์ที่มุ่งเน้นคือสมการ Seq การดำเนินการที่มุ่งเน้นคือการแก้สมการ Opeq หน่วยแสดงแทนด้วย  $Req(Seq, Opeq)$  with Obx การใช้เหตุผลเชิงสมมติฐาน (Hypothetical reasoning): สถานการณ์ปัญหานี้ยังสามารถแก้ได้โดยไม่ต้องใช้ไดอะแกรม แต่ผ่านการใช้เหตุผลเชิงสมมติฐาน (เช่น “ถ้าพวกเขาไม่ทำงานล่วงเวลา”) หน่วยแสดงแทนที่ได้คือ  $Rhy(Shy, Ophy)$  with Obhy โดยที่ Shy เป็นจำนวน, Ophy เป็นการดำเนินการเลขคณิตภายใต้เหตุผลเชิงสมมติฐาน, Obhy เป็นการให้เหตุผลเชิงสมมุติเพื่อหาคำตอบ วิธีการแก้ปัญหเชิงเลขคณิตนี้สามารถเขียนในรูปของไดอะแกรมได้ แต่ในที่นี้การให้เหตุผลเดียวกันนี้สามารถดำเนินไปโดยไม่ต้องใช้ไดอะแกรม วิธีการแก้ปัญหด้วยรูปภาพ (Figural/diagram-based solution): วิธีการแก้ปัญหที่ 3 ใช้ แผนภาพพื้นที่ (area diagram) ร่วมกับการคำนวณเชิงเลขคณิต โดยตีความความยาวแนวนอนเป็นจำนวนวัน และความกว้างแนวตั้งเป็นจำนวนเงิน (yen) หน่วยแสดงแทนที่ได้คือ  $Rdi(Sdi, Opdi)$  with Obdi โดยที่ Obdi คือ “การใช้แผนภาพพื้นที่สำหรับปริมาณที่แตกต่างกัน เช่น วัน  $\times$  เงิน” เพื่อแสดงวิธีแก้สถานการณ์ปัญหา Sdi เป็นรูปร่างตัว L (L-shape) Opdi เป็น

การคงพื้นที่ (conservation of area) โดยการแยกรูป L ออกเป็นสี่เหลี่ยมมุมฉากสองรูป



ภาพ 10 ซ้าย: ZHŪ ed. Shijie, Xīnbiǎn shùxué qǐméng (Joseon Dynasty, Copper Type Edition, 1430). [https://dc.tulips.tsukuba.ac.jp/s/pub\\_ja/document/rb\\_10076713850](https://dc.tulips.tsukuba.ac.jp/s/pub_ja/document/rb_10076713850)

กลาง: TATEBE Kanehiro, Sangaku keimou genkai taisai (Japan, 1690).

<https://kokusho.nijl.ac.jp/biblio/100307114/100?ln=ja>

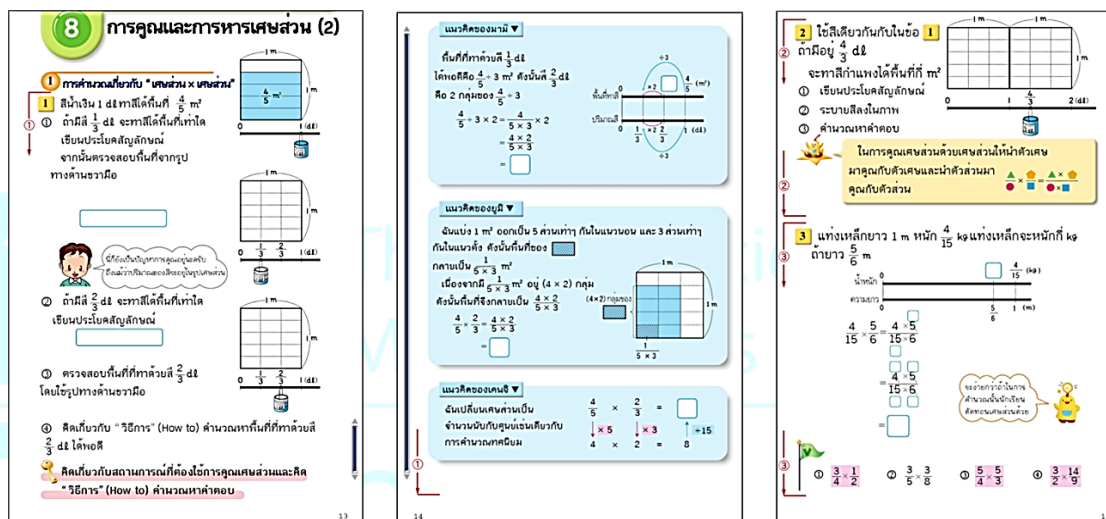
ขวา: Isoda et al (2011, G4 V2 p.24)

ดังที่อภิปรายในหัวข้อ 4-2 ปัญหาที่ 1 สามารถแก้ได้ก่อนด้วย Rhy(Shy, Ophy) with Obhy หลังจากเรียนปัญหาที่ 2 แล้ว นักเรียนสามารถย้อนกลับมาเรียนรู้ Rdi(Sdi, Opdi) with Obdi หากพวกเขายังไม่เคยพบวิธีแก้แบบแผนภาพมาก่อน ซึ่งเกี่ยวข้องกับการตีความใหม่ของรูป L ที่เดิมทำหน้าที่เป็นเพียงไดอะแกรมเชิงปฏิบัติการ (operational diagram) สำหรับการประกอบหรือการแยกสี่เหลี่ยมมุมฉากเท่านั้น แผนภาพเชิงปฏิบัติการเดิมที่ไม่เกี่ยวข้องกับการคำนวณเชิงเลขคณิต แสดงเป็น RLs(SLs, OpLs) with ObLs (ดูภาพ 10, ด้านขวา) เมื่อผู้เรียนได้เรียนรู้การตีความแผนภาพพื้นที่ใหม่ โดยมองความยาวแนวนอนเป็นวันและความกว้างแนวตั้งเป็นเงินเยน พวกเขาสามารถประยุกต์ใช้ Rdi(Sdi, Opdi) with Obdi ได้อย่างกว้างขวางมากขึ้น ตัวอย่างเช่น ในหลักสูตรประถมศึกษาปีที่ 6 (Monbusho, 1940, เล่ม 2, หน้า 74) มีสถานการณ์ปัญหาว่า: “มีนกกระเรียนและเต่ารวมกัน 20 ตัว เมื่อตัวเลขนกของขา คือ 52 จงหาจำนวนนกกระเรียนและเต่า” สถานการณ์ปัญหานี้สามารถแก้ได้อย่างมีประสิทธิภาพโดยใช้แผนภาพในลักษณะ Rdi(Sdi, Opdi) โดยแกนแนวนอนแทนจำนวนของนกกระเรียนและเต่า และแกนแนวตั้งแทนจำนวนขาของมัน (2 สำหรับนกกระเรียน และ 4 สำหรับเต่า) กระบวนการให้เหตุผล “ถ้าสมมติว่าทั้งหมดเป็นนกกระเรียน” จะสอดคล้องกับการให้เหตุผลใน Rhy(Shy, Ophy) with Obhy ดังนั้น “แนวนอนแทนวันและแนวตั้งแทนเงิน” และ “แนวนอนแทนนกกระเรียนและเต่า และแนวตั้งแทนจำนวนขา” จึงเป็น กฎการแปลระหว่างการแสดงแทนทางคณิตศาสตร์ (rules of translation between two mathematical representations): จาก

RLs(SLs, OpLs) with ObLs ไปสู่ Rhy(Shy, Ophy) with Obhy เมื่อผู้เรียนได้เรียนรู้การตีความใหม่นี้แล้ว พวกเขาสามารถใช้ Rdi(Sdi, Opdi) with Obdi ได้โดยตรง

กฎของการแปลง (rule of translation) ที่ตีความแกนนอนและแกนตั้งด้วยปริมาณที่แตกต่างกัน แสดงด้วยสัญลักษณ์ “ $\Leftrightarrow$ ” ดังนั้นลำดับการเรียนรู้จึงแสดงเป็น Rhy(Shy, Ophy) ในปัญหาที่ 1 RLs(SLs, OpLs)  $\Leftrightarrow$  Rhy(Shy, Ophy) หลังปัญหาที่ 2 Rdi(Sdi, Opdi) = {RLs(SLs, OpLs)  $\Leftrightarrow$  Rhy(Shy, Ophy)} ในสถานการณ์ปัญหาที่ 2

## 6-2. ประวัติศาสตร์ที่เกิดขึ้นใหม่



ภาพ 11 Isoda & Inprasitha (2013) Grade 6, vol.2 pp.13-15

ทั้งในโลกตะวันออกและตะวันตก รูปทรงตัว L ได้รับการตั้งชื่อมาตั้งแต่สมัยโบราณ ทั้งนี้เนื่องจากในอดีตมีข้อจำกัดในการคัดลอกแผนภาพด้วยการเขียนด้วยมือ ในกรณีของปัญหาประเภท “นกกระเรียนกับเต่า” (Cranes and Tortoises problems) ซึ่งสามารถแทนในรูปแบบ Rdi(Sdi, Opdi) นักประวัติศาสตร์ Shoichi Jochi (2015) ชี้ให้เห็นว่าการปรากฏครั้งแรกของวิธีแก้ปัญหาโดยใช้แผนภาพ พบในงานของ Tatebe Katahiro (1690) (ภาพ 10 ตรงกลาง) ซึ่งอ้างอิงจากแบบเรียนคณิตศาสตร์ของจีนที่ดีพิมพ์ครั้งแรกในสมัยราชวงศ์หยวน (ภาพ 10 ด้านซ้าย) ก่อนหน้าผลงานของ Tatebe ปัญหาของนกกระเรียนกับเต่า ถูกแก้โดยการให้เหตุผลเชิงสมมติฐาน โดยไม่ใช่แผนภาพ ซึ่งสอดคล้องกับรูปแบบ Rhy(Shy, Ophy) พร้อม Obhy การเกิดขึ้นของวิธีการใช้แผนภาพในประวัติศาสตร์นี้ มีลักษณะขนานกับลำดับการเรียนรู้ที่วิเคราะห์ไว้ในหัวข้อ

ในแบบเรียนคณิตศาสตร์ญี่ปุ่นร่วมสมัยที่จัดพิมพ์โดย Gakkotosho ปัญหาประเภทนี้ไม่ได้ถูกนำเสนออีกต่อไป อย่างไรก็ตาม แนวคิดแบบ RLs(SLs, OpLs) พร้อม ObLs ซึ่งอธิบายเรื่องการคงอยู่ของพื้นที่ (conservation of area) ยังคงได้รับการสอน (ภาพ 10 ด้านขวา) นอกจากนี้ ในการอธิบายการคูณและการหารเศษส่วน ยังมีการใช้แผนภาพลักษณะคล้ายกับ เส้นจำนวนเชิงสัดส่วน (proportional number line) ตัวอย่างเช่น ในการอธิบายว่าการหารด้วยเศษส่วนเท่ากับการคูณด้วยส่วนกลับของเศษส่วนนั้น ได้มีการใช้แผนภาพพื้นที่ (area diagrams) ดังแสดงในภาพ 11 ในรูปดังกล่าวการอธิบายเกิดขึ้นผ่าน แผนภาพพื้นที่ที่ควบคู่กับเส้นจำนวนที่วางในแนวนอนเพื่อใช้วัดหน่วยเป็นเมตร ลักษณะนี้ดูใกล้เคียงกับรูปแบบ Rdi(Sdi, Opdi) พร้อม Obdi อย่างไรก็ตาม แผนภาพพื้นที่ที่ยังคงรักษา ความยาวและความกว้างให้เป็นปริมาณชนิดเดียวกัน แทนที่จะเปลี่ยนเป็นปริมาณคนละชนิดเหมือนในรูปแบบ Rdi(Sdi, Opdi) พร้อม Obdi ในภาพ 11 ยังมีวิธีแก้ปัญห่อีกวิธีหนึ่งโดยใช้ เส้นจำนวนเชิงสัดส่วน เพื่อแสดงปริมาณที่แตกต่างกัน ซึ่งถือเป็น แผนภาพเชิงดำเนินการ (operational diagram) เช่นกัน เพราะสามารถนำไปสู่การหาคำตอบผ่านการดำเนินการบนแผนภาพในรูปนี้ ในภาพ 11 แผนภาพพื้นที่ที่ใช้แทนปริมาณของพื้นที่ ในขณะที่ปริมาณอีกชนิดหนึ่งถูกแสดงผ่านเส้นจำนวน

## 7. บทสรุป

บทความนี้ได้นำเสนอส่วนหนึ่งของ ทฤษฎีการแสดงแทนทางคณิตศาสตร์ (Theory of Mathematical Representation) โดยนิยาม การแสดงแทนทางคณิตศาสตร์ (R) ผ่านองค์ประกอบสามประการ ได้แก่ วัตถุประสงค์หรือบริบท (Objective/Context: Ob) สัญลักษณ์ที่เป็นจุดเน้น (Focused Symbol: S) และ การดำเนินการที่เป็นจุดเน้น (Focused Operation: Op) อีกทั้งยังแสดงให้เห็นว่า วัตถุประสงค์ของการกำหนดจุดเน้น นั้นเป็น เนื้อหาของการสอนในหลักสูตร และสามารถนำไปประยุกต์ใช้ในการวิเคราะห์แบบเรียนได้

ภายใต้กรอบแนวคิดนี้ แผนภาพเชิงดำเนินการ (operational diagrams) ถูกจำแนกว่าเป็น การแสดงแทนทางคณิตศาสตร์ประเภทหนึ่ง ท่ามกลางการแสดงแทนเชิงรูปภาพหลากหลายรูปแบบ และได้รับการยืนยันว่าทำหน้าที่เป็น เครื่องมือในการคิด (thinking tools) แนวคิดนี้ได้รับการอธิบายผ่านตัวอย่างของแผนภาพเชิงปฏิบัติการสองกรณี รวมทั้งการวิเคราะห์แบบเรียน ซึ่งแสดงให้เห็นว่าสามารถใช้กรอบแนวคิดนี้ในการตีความ ลำดับการเรียนรู้ (learning sequences) ได้ในแบบเรียนที่มีต้นกำเนิดจากญี่ปุ่น พบว่าแผนภาพเชิงปฏิบัติการจำนวนมากถูกนำเข้าไปอยู่ในเนื้อหา

จากมุมมองของ David Tall (2013) สื่อจับต้องได้หรือสื่อรูปธรรม (manipulative, concrete material) ที่ใช้ในการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ก็ถือเป็นส่วนหนึ่งของ โลกแห่งการรับรู้เชิงรูปธรรม (Embodiment world) และนัยสำคัญคือสามารถมองได้ว่าเป็นการแสดงแทนทางคณิตศาสตร์ส่วนหนึ่งของคณิตศาสตร์ในระดับโรงเรียน ในบทความนี้ กรอบแนวคิดที่ประกอบด้วยวัตถุประสงค์/บริบท สัญลักษณ์ที่เป็นจุดเน้นและการดำเนินการ สามารถนำไปใช้วิเคราะห์ การแสดงแทนแบบสื่อจับต้องได้ (manipulative representations) ในฐานะส่วนหนึ่งของการแสดงแทนทางคณิตศาสตร์ และช่วยให้สามารถแยกแยะระหว่าง การแสดงแทนทางคณิตศาสตร์ กับการแสดงแทนที่ไม่ใช่คณิตศาสตร์ได้ ตัวอย่างเช่น การพับกระดาษโอริกามิ (Origami) เป็นศิลปะของการพับกระดาษ แต่หากกระบวนการพับกระดาษนั้นถูกวิเคราะห์ด้วย เรขาคณิตและการดำเนินการเชิงพีชคณิต ก็จะกลายเป็นวัตถุของการสำรวจทางคณิตศาสตร์ในสาขาที่เรียกว่า ORIGAMICS ตามงานของ Kazuo Haga (2008) ซึ่งถือเป็นส่วนหนึ่งของการแสดงแทนทางคณิตศาสตร์

ทฤษฎีนี้ถูกพัฒนาขึ้นมาแต่เดิมเพื่อ ทำให้กิจกรรมของการทำให้เป็นคณิตศาสตร์ (mathematization) มีความชัดเจนมากขึ้น ทฤษฎีนี้ไม่ได้มีจุดมุ่งหมายเพื่ออธิบาย กระบวนการทางปัญญาของนักเรียนแต่ละคน แต่มีเป้าหมายเพื่อสนับสนุนการทำเคียวไซ เคงคิว (kyozai kenkyu) หรือการเตรียมบทเรียนและสื่อการสอน โดยเฉพาะอย่างยิ่งเพื่อวิเคราะห์วัตถุประสงค์ของสถานการณ์ปัญหา ในลำดับของสถานการณ์ปัญหา (task sequence) และเพื่อจัดลำดับของสถานการณ์ปัญหาใหม่ ให้สามารถบรรลุวัตถุประสงค์ดังกล่าวในชั้นเรียนในการศึกษาชั้นเรียนซึ่งมุ่งพัฒนานักเรียนให้สามารถคิดเชิงคณิตศาสตร์ได้ด้วยตนเองและเพื่อการเรียนรู้ของตนเอง การออกแบบ ลำดับของโจทย์/ปัญหา ถือเป็นหัวใจสำคัญของ kyozaikenkyu เนื่องจากนักเรียนจะมีส่วนร่วมในกิจกรรมการเรียนรู้ผ่านการเผชิญกับ สถานการณ์ปัญหาใหม่ในแต่ละวัน โดยใช้สิ่งที่ตนได้เรียนรู้มาแล้ว

บทความนี้ยังไม่ได้กล่าวถึง เป้าหมายสูงสุดของทฤษฎีนี้ ซึ่งคือการอธิบาย กระบวนการทำให้เป็นคณิตศาสตร์ (mathematization) ตามที่ Isoda (2015) อธิบายไว้ในภาษาญี่ปุ่น โดยมองกระบวนการดังกล่าวในฐานะการเปลี่ยนผ่านระหว่างโลกของการแสดงแทนทางคณิตศาสตร์ อย่างไรก็ตามกรอบแนวคิดนี้ได้ให้พื้นฐานที่จำเป็นสำหรับการอธิบายกระบวนการ จากรูปธรรม กึ่งรูปธรรม และสู่จำนวนตามแนวทางของ TLSOA (Transformative Lesson Study incorporating Open Approach) ในระดับประถมศึกษาตอนต้นตามแนวทางของรองศาสตราจารย์ ดร.ไมตรี อินทร์ประสิทธิ์ และคณะ ซึ่งประเด็นนี้จะถูกนำไปอภิปรายในบทความถัดไป

## เอกสารอ้างอิง

- Apollonius de Peruga, Edmundi Halleii edited. (1710). Theatro Sheldoniano.
- Atkin, A. (2023). Peirce's Theory of Signs, in Edward N. Zalta & Uri Nodelman eds. *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Spring 2023 Edition  
<https://plato.stanford.edu/archives/spr2023/entries/peirce-semiotics/>
- Euclid. (1537). Euclidis Megarensis mathematici clarissimi Elementorum geometricorum. lib. XV. : cum expositione Theonis in priores XIII à Bartholomæo Veneto latinitate donata, Campani in omnes, & Hypsiclis Alexandrini in duos postremos. His adiecta sunt Phænomena, Catoptrica & Optica, deinde Protheoria Marini & Data, Postremum uero, opusculum de leui & ponderoso, hactenus non uisum, eiusdem autoris. Iohannem Heruagium.
- Freudenthal, H. (1972). *Mathematics as an Educational Task*. D. Reidel.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. D. Reidel.
- Gravemeijer, K. (1999). How emergent models may foster the constitution of formal mathematics. *Mathematical Thinking and Learning*.1 (2), 155-177.
- García, J., Dolores, C. (2021). Pre-university students' mathematical connections when sketching the graph of derivative and antiderivative functions. *Mathematics Education Research Journal*, 33, 1–22. <https://doi.org/10.1007/s13394-019-00286-x>
- Haga, K. (2007). *Origamics: Mathematical Explorations Through Paper Folding* (Fonacier, J. C & Isoda, M. translated). World Scientific.
- Inprasitha, M., Isoda, M., Araya, Ro. (2023). Mathematical Literacy for Digital Era: Review of Mathematical Thinking and Computational Thinking for Curriculum Development. *East and West Journal of Mathematics*. 24(2). 137-155.
- Isoda, M. (1990). 数学化における言語の再構成過程に関する一考察: 数学的表現からみた分割数の授業の分析II. 数学教育論文発表会論文集. 23. 19-24
- 磯田正美. (1993). 学習過程における表現と意味の生成に関する一考察. 三輪辰郎先生退官記念論文集編集委員会編 数学教育学の進歩. 東京: 東洋館出版社. 108-125.
- Isoda, M., Murata, A. (2011). *Study with your friends, mathematics for elementary school, 4th grade*, v. 2. Gakkotosyo Co.Ltd.
- Isoda, M. & Inprasitha, M. (2013). *เรียนคณิตศาสตร์กับเพื่อนๆ : คณิตศาสตร์สำหรับระดับชั้นประถมศึกษา, แพลและเรียบเรียง, ไมตรี อินทร์ประสิทธิ์ ; ที่ปรึกษา, มะชะมิ อิโสะตะ (Masami Isoda) ; [ผู้แปลและเรียบเรียง, ไมตรี อินทร์ประสิทธิ์ และนายอรรค อินทร์ประสิทธิ์]*

- Isoda, M. (2015). *Mathematization for Mathematics Education* 算数・数学教育における数学的活動による学習過程の構成. 共立出版
- Isoda, M. (2018). Mathematization: A Theory for Mathematics Curriculum Design. In M.Kawazoe (Ed.) *International Workshop on Mathematics Education for Non-Mathematics Students Developing Advanced Mathematical Literacy at Tokyo, Japan*. 27-34.
- Isoda, M., Teh, K.H. & Montecillo, P.L. (2019). Seeking the Value of Mathematics Education: The Case of SEA-BES. *Journal of Southeast Asian Education*, 2019 Issue.v.1. 39-49.
- Isoda, M. & Olfo, R. (2021). *Teaching Multiplication with Lesson Study*. Springer.  
<https://doi.org/10.1007/978-3-030-28561-6>
- Isoda, M., Teh, K.H., Gan, T.H. (2024). *SEAMEO Basic Education Standards (SEA-BES): Common Core Regional Learning Standards (CCRLS) in Mathematics for Primary and Lower Secondary Levels, Second Edition*. SEAMEO-RECSAM.  
[https://www.cried.tsukuba.ac.jp/pdf/SEA-BES\\_CCRLS\\_in\\_Mathematics\\_Second\\_Edition.pdf](https://www.cried.tsukuba.ac.jp/pdf/SEA-BES_CCRLS_in_Mathematics_Second_Edition.pdf)
- Jiǔ Zhāng Suàn Shù, 1st century BC–2nd century AD; Liu Hui edition, 263 AD) and Sun Tzu's Mathematical Classic (Sunzi Suanjing, 5th–6th century AD)
- Jochi, S. (2015). Cranes and Tortoises type problems [https://mathinfo.cried.tsukuba.ac.jp/museum/wisdom\\_of\\_math/copy\\_of\\_ppt\\_Jochi20151116.pdf](https://mathinfo.cried.tsukuba.ac.jp/museum/wisdom_of_math/copy_of_ppt_Jochi20151116.pdf).
- Liu Hui edition (1975). Jiǔ Zhāng Suàn Shù (劉徽李淳風注釋 九章算術. 商務印書館)
- Ministry of Education (1636). *Elementary School Mathematics*, G2. v1. (尋常小学算術. 東京書)
- Ministry of Education (1937). *Elementary School Mathematics*, G3. v2. (尋常小学算術. 文部省)
- Ministry of Education (1939). *Elementary School Mathematics*, G5. v1. (尋常小学算術. 文部省)
- Ministry of Education (1939). *Elementary School Mathematics*, G5. v2. (尋常小学算術. 文部省)
- Ministry of Education (1940). *Elementary School Mathematics*, G6. v2. (尋常小学算術. 文部省)
- Montecillo, P. L., Teh, K. H., & Isoda, M. (2018). Challenges in the development of regional mathematics curriculum standards: The case of Southeast Asia Ministers of Education Organisation (SEAMEO). In Y. Shimizu & R. Vithal (Eds.), *ICMI Study 24 conference proceedings: School mathematics curriculum reforms: Challenges, changes and opportunities* (pp. 539–546). University of Tsukuba.
- Piaget, J. (1972). *L'Épistémologie Génétique*. Collection Que sais-je 519. Presses Universitaires de France

Polya, G.(1945). *How to Solve it*. NJ: Princeton University Press

---- (1975). *Sunzi Suanjing*. (孫子算經. 商務印書館)

----(1975). *Zhōu bì suàn jīng* (周髀算經. 趙君卿注. 商務印書館)

Saengpun, J. and Inprasitha, M. (2012) Development of a Child's Semiotic Activity with the Help of Psychological Tools: A Vygotsky's Cultural-Historical Perspective. *Psychology*, **3**, 424-427. doi: 10.4236/psych.2012.35060.

Stingler, L. E. (2002). *Fibonacci's Liber Abaci: A Translation into Modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation*. Springer.

Tatebe, K. (1690). *Sangaku keimou genkai Taisei*. 算学啓蒙諺解大成  
<https://kokusho.nijl.ac.jp/biblio/100307114/100?ln=ja>

Tall, D. (2013). *How Humans Learn to Think Mathematically*. Cambridge University Press.

