

การเติบโตแนวคิดทางคณิตศาสตร์: การสร้างแนวคิดทางคณิตศาสตร์จากแนวคิดขั้นต้นสู่แนวคิดขั้นสูง Mathematical Thinking Growth : Developing Mathematical Ideas from Preliminary to Ultimate Level

Received : 18 ก.ค. 2568 Revised : 21 ส.ค. 2568 Accepted : 28 พ.ย. 2568

นิศรา สุทธิสังข์¹ กรรณิการ์ ม่วงชู² เพ็ญภา สุวรรณบำรุง³ พรณิการ์ มีอ่อน⁴ วรวิวัฒน์ วิเศษสิงห์⁵ สุขจิตร ตั้งเจริญ⁶
Nisara Suttisangk¹ Kannika Muangchu² Pennapa Suwanbamrung³ Phannika Mion⁴ Wareewon Wisesing⁵ Sukchit Tangcharoen⁶

¹⁻⁶ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลพระนคร กรุงเทพมหานคร 10800

¹⁻⁶ Faculty of Science and Technology, Rajamangala University of Technology Phra Nakhon, Bangkok, 10800

¹ Corresponding Author: E-mail: nisara.s@rmutp.ac.th

บทคัดย่อ

บทความนี้อธิบายการเติบโตแนวคิดทางคณิตศาสตร์ซึ่งพัฒนาจากแนวคิดพื้นฐานสู่แนวคิดขั้นสูง วิธีการวิจัยใช้วิธีการวิจัยเชิงคุณภาพโดยการตรวจสอบแบบสามเส้าจากชิ้นงานของนักศึกษา บันทึกการสังเกต พฤติกรรมการคิดและการคาดการณ์แนวคิดทางคณิตศาสตร์ กลุ่มเป้าหมายเป็นกลุ่มตัวอย่างจำนวน 1 กลุ่ม จากนักศึกษามหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลพระนครที่ลงทะเบียนเรียนรายวิชาแคลคูลัส 1 ปีการศึกษา 2567 โดยใช้วิธีการสุ่ม การวิเคราะห์ผลใช้กรอบแนวคิด [1],[2]

ผลการวิจัย พบว่า แนวคิดทางคณิตศาสตร์ของผู้เรียนเบื้องต้นเริ่มจากโลกเชิงกายภาพผ่านการสัมผัส แล้วพัฒนาไปสู่โลกเชิงสัญลักษณ์ แล้วพัฒนาไปสู่โลกเชิงสัญลักษณ์ในการคิดคำนวณทางคณิตศาสตร์ผ่านการใช้สัญกรณ์ทางคณิตศาสตร์ และพัฒนาไปสู่โลกทางคณิตศาสตร์เพื่อสร้างนิยาม สัจพจน์ทางคณิตศาสตร์อย่างเป็นแบบแผน นอกจากนี้ สื่อที่เป็นรูปธรรมส่งเสริมให้ผู้เรียนเกิดแนวคิดผ่านประสบการณ์การสัมผัส ซึ่งช่วยเชื่อมโยงจินตนาการเข้ากับการคำนวณทางคณิตศาสตร์ได้อย่างมีประสิทธิภาพ

คำสำคัญ : การคิดทางคณิตศาสตร์ สามโลกทางคณิตศาสตร์ แคลคูลัส

Abstract

This article discusses the growth of mathematical thinking, developing from foundational concepts to more advanced ideas. The research methodology employed qualitative research through the triangulation of tasks, i.e., students' worksheet, field notes, and anticipations of mathematical concepts of the students. The target group was a sample group from Rajamangala University of Technology Phra Nakhon students registering Calculus 1 in the academic year 2024 through a random sampling method. The analysis used the conceptual framework established by David Tall [1],[2]. The research findings indicated that the learner's mathematical concepts began in the physical world through conceptual embodiment, then developed into symbolic calculation and manipulation, and finally, into the axiomatic

formulation to create definitions and mathematical axioms systematically. Furthermore, concrete materials enabled learners to grasp concepts through tactile experience which effectively connects imagination with mathematical computation.

Keywords: mathematical thinking, three worlds of mathematics, calculus

1. บทนำ

ปัจจุบันแคลคูลัสเป็นวิชาที่สำคัญและเป็นพื้นฐานการเรียนรู้ทางด้านวิทยาศาสตร์ เทคโนโลยี วิศวกรรมศาสตร์ และการศึกษาด้านคณิตศาสตร์ (STEM) ซึ่งผู้เรียนสร้างความเข้าใจและก้าวข้ามการเรียนรู้ด้วยความยากลำบาก นอกจากนี้ หลักสูตรเนื้อหาแคลคูลัสยังสร้างความหมายของการหาอนุพันธ์จากนิยามของลิมิตอย่างเป็นทางการ โดยปราศจากการให้ความหมายของการหานิยามของอนุพันธ์อย่างเป็นรูปธรรมแก่ผู้เรียน [1] การเข้าสู่การเรียนรู้แคลคูลัสอย่างมีความหมายสำหรับผู้เรียนจำเป็นอย่างยิ่งสำหรับผู้สอนต้องตระหนักถึงแนวคิดของผู้เรียนและให้ผู้เรียนสร้างแนวคิดโดยเชื่อมโยงแนวคิดจากการลงมือปฏิบัติที่เป็นรูปธรรมเพื่อเข้าสู่การคำนวณทางคณิตศาสตร์ [2] และในปัจจุบันนี้การนำเทคโนโลยีหรือสื่อการสอนมาใช้เป็นเครื่องมือในการสอนเอื้อประโยชน์ให้ผู้เรียนเกิดแนวคิดทางคณิตศาสตร์ และทำให้ผู้เรียนก้าวเข้าสู่โลกคณิตศาสตร์อย่างมีความหมาย [1]

การพิจารณากระบวนการสร้างแนวคิดทางคณิตศาสตร์ของผู้เรียนที่เกิดขึ้นผ่านโลกเชิงกายภาพสู่โลกเชิงคณิตศาสตร์ทำให้เห็นช่องว่างของการเชื่อมต่อและการพัฒนาการคิดทางคณิตศาสตร์ของผู้เรียน [2] และเกิดพื้นที่ในการพิจารณากระบวนการคิดทางคณิตศาสตร์จากสื่อรูปธรรมไปสู่การคิดคำนวณทางสัญลักษณ์ โดยเน้นเกี่ยวกับการพิจารณาการคิดเบื้องต้นสู่การคิดขั้นสูง ด้วยเหตุนี้จึงเกิดคำถามว่า ผู้เรียนสร้างแนวคิดทางคณิตศาสตร์ได้อย่างไรจากมุมมองการคิดพื้นฐานสู่การคิดขั้นสูง

2. วัตถุประสงค์การวิจัย

2.1 เพื่อวิเคราะห์การเติบโตการคิดทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาจากการสร้างแนวคิดทางคณิตศาสตร์พื้นฐานสู่การคิดขั้นสูง

3. สมมติฐานการวิจัย

นักศึกษสามารถสร้างแนวคิดทางคณิตศาสตร์จากแนวคิดพื้นฐานสู่แนวคิดขั้นสูงตามธรรมชาติของนักศึกษา

4. **วิธีดำเนินการวิจัย** ใช้วิธีการวิจัยเชิงคุณภาพจากการตรวจสอบแบบสามเส้าจากผลงานนักศึกษา บันทึกการสังเกตพฤติกรรมความคิดและการคาดการณ์แนวคิดของนักศึกษา อาศัยการพรรณนาแบบตีความหมาย

4.1 กลุ่มตัวอย่าง นักศึกษามหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลพระนครที่ลงทะเบียนเรียนรายวิชาแคลคูลัส 1 ปีการศึกษา 2567 โดยการสุ่มกลุ่มตัวอย่างจำนวน 1 กลุ่ม

4.2 เครื่องมือในการวิจัย แบ่งเป็น ดังนี้

4.2.1 สื่อการสอน เรื่อง “ฉันทเปลี่ยนแปลงอย่างไร” (เพื่อให้ความหมายของการหาอนุพันธ์)

4.2.2 แบบสังเกตพฤติกรรมความคิดทางคณิตศาสตร์ (ผ่านการพิจารณาจากผู้เชี่ยวชาญด้านคณิตศาสตร์ศึกษา)

4.2.3 การคาดการณ์แนวคิดของนักศึกษา (ผ่านการสะท้อนผลของอาจารย์ในสาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลพระนครจำนวน 3 ท่าน)

4.2.4 ผลงานของนักศึกษา (แนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาที่เกิดขึ้นจากแบบฝึกหัดเรื่องการทำค่าอนุพันธ์)

4.3 การรอบการวิเคราะห์ผล: ตามกรอบการวิเคราะห์ผลการพัฒนาการคิดทางคณิตศาสตร์ [2],[3]

4.4 การเก็บรวบรวมข้อมูล แบ่งเป็น ดังนี้

4.4.1 นำสื่อการสอนที่สร้างขึ้นเพื่อนำเข้าสู่ปัญหาและให้นักศึกษาได้ลงมือปฏิบัติ รวมถึงใช้การสังเกตพฤติกรรมการคิดบันทึกในแบบสังเกตพฤติกรรมการคิด

4.4.2 นำแบบฝึกหัดที่สร้างขึ้นเพื่อให้นักศึกษาได้แก้ปัญหาคำตอบรวมถึงใช้การสังเกตพฤติกรรมการคิดบันทึกในแบบสังเกตพฤติกรรมการคิด

4.4.3 นำการคาดการณ์แนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาซึ่งผ่านการสะท้อนผล เพื่อนำมาใช้วิเคราะห์และตีความหมาย

4.5 การดำเนินการวิจัย แบ่งเป็น ดังนี้

4.5.1 สร้างเครื่องมือในการวิจัยโดยผ่านการพิจารณาจากผู้เชี่ยวชาญด้านคณิตศาสตร์ศึกษา รวมถึงการสร้างสื่อการสอนและแผนการสอนเพื่อสนับสนุนวิธีคิดของนักศึกษาที่เกิดขึ้น

4.5.2 ศึกษาแนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษากับกลุ่มตัวอย่าง โดยใช้แบบสังเกตพฤติกรรมการคิดทางคณิตศาสตร์

4.5.3 วิเคราะห์แนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาตามกรอบการ [2],[3]

4.5.4 ตรวจสอบการวิเคราะห์ผลแบบสามเส้าจากผลงานนักศึกษา แบบสังเกตพฤติกรรมการคิด และการคาดการณ์แนวคิดของนักศึกษา

4.5.5 อธิบายผลที่เกิดขึ้นโดยการพรรณนาและตีความหมาย

4.5.6 สรุปผลการวิจัย

5. กรอบการวิเคราะห์ผล

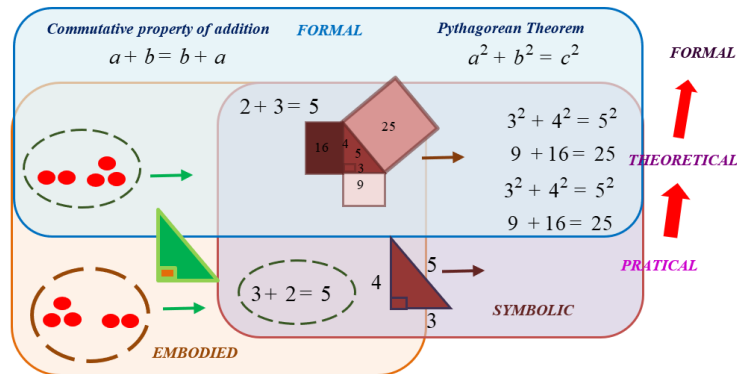
การพิจารณาพัฒนาการความซับซ้อนของการคิดทางคณิตศาสตร์ผ่าน 3 ระดับการคิดทางคณิตศาสตร์ที่ต่อเนื่องกัน ได้แก่ ระดับการคิดทางคณิตศาสตร์เชิงปฏิบัติการ (*practical*) ระดับการคิดทางคณิตศาสตร์เชิงทฤษฎี (*theoretical*) และระดับการคิดทางคณิตศาสตร์เชิงแบบแผน (*formal*)

ระดับการคิดทางคณิตศาสตร์เชิงปฏิบัติการ: ผู้เรียนสามารถบอกคุณสมบัติและรูปแบบลักษณะทางกายภาพของสิ่งของ มีการดำเนินการทางคณิตศาสตร์เบื้องต้น (บวก ลบ คูณ หาร) และบอกความสัมพันธ์ที่เกิดขึ้นอย่างทันทีทันใดในเชิงกายภาพ (สูงกว่า ต่ำกว่า มากกว่า น้อยกว่า) ระดับการคิดทางคณิตศาสตร์เชิงทฤษฎี: ผู้เรียนสามารถกำหนดนิยาม และนำไปสู่การอนุมานสมบัติอื่น ๆ จากนิยามเหล่านั้น และระดับการคิดทางคณิตศาสตร์เชิงแบบแผน: ผู้เรียนสามารถใช้การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ที่เป็นระบบภายใต้กรอบของนิยามและการพิสูจน์เชิงสัจพจน์ ทั้งสามระดับการคิดทางคณิตศาสตร์ถือเป็นลำดับขั้นตอนการคิดอย่างต่อเนื่อง [3]

นอกจากนี้ David Tall กำหนดรูปแบบพัฒนาการคิดทางคณิตศาสตร์ไว้ 3 รูปแบบมีชื่อเรียกว่า “สามโลกของคณิตศาสตร์” (*three worlds of mathematics*) ซึ่งมีความสลับซับซ้อนเพิ่มขึ้นตามลำดับ ได้แก่ โลกเชิงกายภาพ (*embodiment*) โลกเชิงสัญลักษณ์ (*symbolism*) และโลกเชิงแบบแผน (*formalism*)

โลกเชิงกายภาพ: ผู้เรียนใช้การหยิบ จับ สัมผัสสิ่งของ แยกแยะ บ่งบอกคุณลักษณะ และนับจำนวนได้ โลกเชิงสัญลักษณ์: ผู้เรียนใช้ตัวเลข เครื่องหมายทางคณิตศาสตร์เพื่อนำมาคิดคำนวณทางคณิตศาสตร์ และโลกเชิงแบบแผน: ผู้เรียนใช้นิยาม สัจพจน์ ทฤษฎีเพื่อนำมาใช้ในการคิดคำนวณ [2]

กรอบแนวคิดทั้งสองมีความสัมพันธ์และสอดคล้องผสมผสานกันในการพิจารณาพัฒนาการคิดทางศาสตร์อย่างเป็นลำดับขั้นที่ต่อเนื่องกัน ดังแสดงในภาพที่ 1

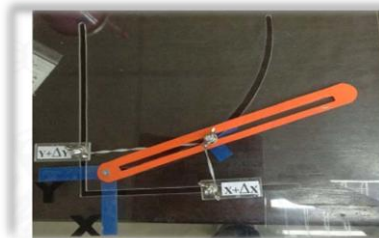


ภาพที่ 1 การเติบโตการคิดทางคณิตศาสตร์ผ่านสามโลกคณิตศาสตร์โดยพัฒนาการผ่านระดับคณิตศาสตร์เชิงปฏิบัติการ คณิตศาสตร์เชิงทฤษฎีและคณิตศาสตร์เชิงแบบแผน

กรอบแนวคิดดังกล่าวสามารถนำมาใช้ในการวิเคราะห์การคิดทางคณิตศาสตร์ในเรื่องแคลคูลัสได้ เนื่องจากการเข้าสู่ความหมายของอนุพันธ์เกี่ยวข้องกับอัตราการเปลี่ยนแปลงที่สะท้อนจากสิ่งที่เป็นรูปธรรม พัฒนาไปสู่การคิดคำนวณการหาอนุพันธ์และพัฒนาไปสู่การเขียนนิยามของการหาค่าอนุพันธ์ ซึ่งการหาค่าอนุพันธ์เกี่ยวข้องกับอัตราการเปลี่ยนแปลงซึ่งจำเป็นต้องอาศัยความเข้าใจแนวคิดของอัตราการเปลี่ยนแปลงที่เป็นรูปธรรมจากสื่อที่สนับสนุนการคิด [4]

6. การวิเคราะห์ผล จากการสุ่มกลุ่มตัวอย่างแสดงถึงแนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาที่ โดยนำผลงานการคิดทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาและแบบบันทึกพฤติกรรมการคิดทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาที่เกิดขึ้นมาวิเคราะห์ ดังตัวอย่างการวิเคราะห์ต่อไปนี้

ตัวอย่างการวิเคราะห์ : สถานการณ์ปัญหา “ฉันเปลี่ยนแปลงอย่างไร” เพื่อเข้าสู่นิยามของอนุพันธ์

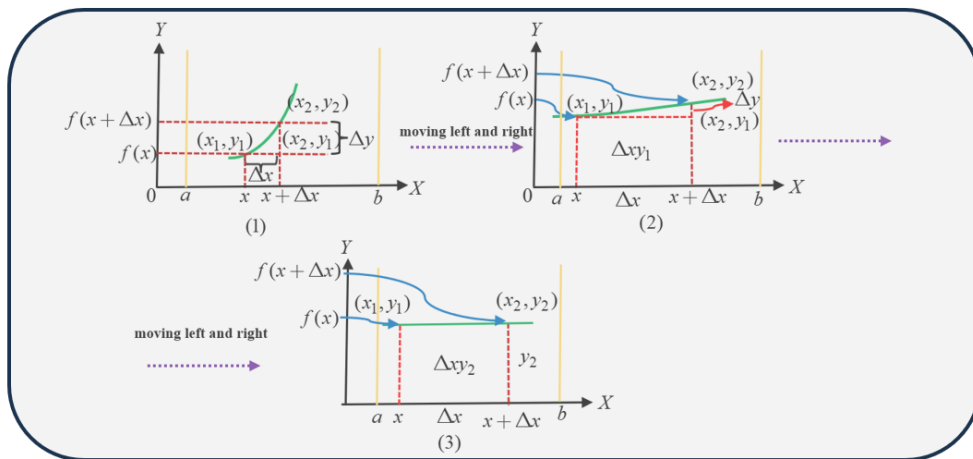


ภาพที่ 2 สื่อการสอนแผ่นพลาสติกซึ่งสามารถเคลื่อนที่ไปตามแกน X และ Y

สื่อการสอนได้ออกแบบเพื่อสนับสนุนแนวคิดทางคณิตศาสตร์ของผู้เรียนและเอื้อประโยชน์ให้เกิดความเข้าใจนิยามและความหมายของอนุพันธ์เพื่อให้ผู้เรียนมีอิสระในการเลื่อนหลุดไปตามรางเลื่อน ผู้เรียนสังเกตเห็น

การเปลี่ยนแปลงที่สัมพันธ์กัน คือ เมื่อเลื่อนหุุด $x + Dx$ มาทางขวามือ ค่าของ $y + Dy$ มีค่ามากขึ้น ห่างจากแกน Y มากขึ้น และเมื่อเลื่อนหุุด $x + Dx$ มาทางซ้ายมือ ค่าของ $y + Dy$ มีค่าน้อยลง ใกล้แกน Y มากขึ้น

เมื่อนำมาแนวคิดของนักศึกษาวิเคราะห์พบว่า การเข้าสู่ความหมายของอนุพันธ์ผ่านการหาค่าการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x นักศึกษาสนใจตำแหน่งของการเปลี่ยนแปลงจาก $f(x)$ เข้าสู่ $f(x + Dx)$ เมื่อเทียบกับ x เข้าสู่ $x + Dx$ เมื่อคลี่แกน X ตำแหน่งของ Δx กว้างมากขึ้นตำแหน่งของ y_1 กับ y_2 เกือบทับกันสนิท ทำให้เกิดพื้นที่สี่เหลี่ยมผืนผ้าคือ Δxy_1 และเมื่อคลี่แกน X กว้างมากขึ้น ตำแหน่งของ y_1 กับ y_2 เป็นตำแหน่งเดียวกัน Δxy_1 ทำให้เกิดพื้นที่สี่เหลี่ยมผืนผ้าคือ Δxy_2 แสดงดังภาพที่ 3



ภาพที่ 3 การเข้าสู่นิยามของอนุพันธ์ (1) การเข้าสู่ความหมายของปริพันธ์ (2), (3)

จากภาพที่ 3(1) แสดงให้เห็นว่า การวัดการเปลี่ยนแปลงของ y เมื่อเทียบกับ x เป็นการแสดงถึงการวัดการเปลี่ยนแปลงจาก $f(x)$ เข้าสู่ $f(x + Dx)$ เมื่อเทียบกับ x เข้าสู่ $x + Dx$ อีกนัยหนึ่ง

โดยพิจารณา จาก $f(x + Dx) - f(x) = Dy$ จะได้การเปลี่ยนแปลงจาก $f(x)$ เข้าสู่ $f(x + Dx)$ แสดงแทนด้วย Dy และเมื่อพิจารณาจาก $(x + Dx) - x = Dx$ จะได้การเปลี่ยนแปลงจาก x เข้าสู่ $x + Dx$ ได้ Dx

ดังนั้น การวัดการเปลี่ยนแปลงจาก $f(x)$ เข้าสู่ $f(x + Dx)$ เมื่อเทียบกับ x เข้าสู่ $x + Dx$ คือ $\frac{Dy}{Dx}$

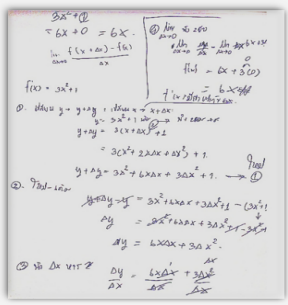
และถ้าการเปลี่ยนแปลงจาก x เข้าสู่ $x + Dx$ ได้ Dx มีระยะทางสั้นลงจนเกือบเข้าใกล้ 0 ในทำนองเดียวกัน จะได้การเปลี่ยนแปลงจาก $f(x)$ เข้าสู่ $f(x + Dx)$ ได้ Dy มีระยะทางสั้นลงจนเกือบเข้าใกล้ 0 เช่นเดียวกัน

ถ้าลิมิตของ $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ เมื่อ Δx เข้าใกล้ 0 หาค่าได้ เรียกลิมิตนี้ว่าอนุพันธ์ของ y เทียบกับ x เขียนแทนด้วย

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} \text{ ซึ่งเป็นนิยามของอนุพันธ์}$$

เมื่อนักศึกษาพิจารณาที่มาของนิยามอนุพันธ์แล้ว ผู้สอนให้นักศึกษาหาค่าอนุพันธ์โดยใช้นิยาม นักศึกษาแสดงวิธีคิดดังภาพที่ 4

$f(x) = 3x^2 + 1$
 วิธีคิด เปลี่ยน $y \otimes y + Dy$ และ $x \otimes x + Dx$
 $y = 3x^2 + 1 \dots \dots \dots (1)$
 $y + Dy = 3(x + Dx)^2 + 1$
 $= 3(x^2 + 2x(Dx) + (Dx)^2) + 1$
 $= 3x^2 + 6x(Dx) + 3(Dx)^2 + 1 \dots \dots \dots (2)$
 ดังนั้น นำ (2) - (1)
 จะได้ $y + Dy - y = [3x^2 + 6x(Dx) + 3(Dx)^2 + 1] - [3x^2 + 1]$
 $Dy = 6x(Dx) + 3(Dx)^2$
 นำ Dx หาทิ้งสองข้างของสมการ
 $\frac{Dy}{Dx} = \frac{6x(Dx)}{Dx} + \frac{3(Dx)^2}{Dx}$
 ดังนั้น $\frac{Dy}{Dx} = 6x + 3Dx$
 นำ $\lim_{Dx \rightarrow 0}$ ใส่ทั้งสองข้างของสมการ
 $\lim_{Dx \rightarrow 0} \frac{Dy}{Dx} = \lim_{Dx \rightarrow 0} 6x + 3Dx$
 $= 6x$
 ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = 6x \quad \#$



ภาพที่ 4 การหาค่าอนุพันธ์โดยใช้นิยาม (14 มกราคม 2568)

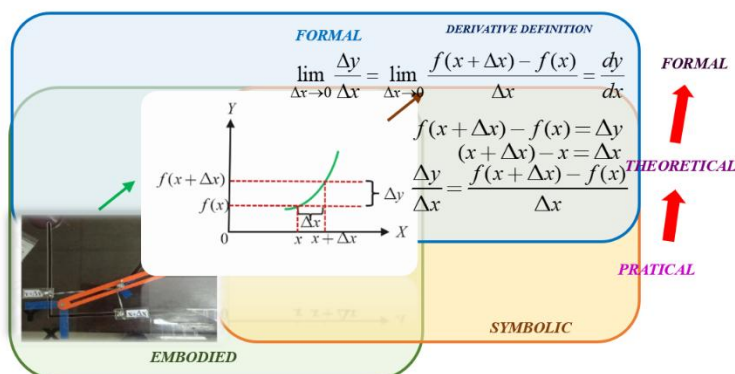
นักศึกษานำนิยามของอนุพันธ์มาประยุกต์ใช้โดยนำ $\Delta x, \Delta y$ ซึ่งเป็นค่าการเปลี่ยนแปลงมาเป็นแนวคิดหลักในการหาค่าอนุพันธ์และใช้หลักการทางคณิตศาสตร์ ทั้งการแทนค่าและการเปลี่ยนรูปและหลักการแก้สมการมาหาคำตอบ และนำแนวคิดของลิมิตที่เข้าใกล้ 0 ซึ่งเป็นเครื่องมือหลักในการหาค่าอนุพันธ์

7. ผลการวิจัย

ผู้เรียนใช้การสัมพันธ์ หีบ จับอุปกรณ์ เลื่อนหุ้ดเพื่อหาความสัมพันธ์ระหว่างแกน Y กับแกน X และทำให้ผู้เรียนสร้างความหมายของ Dx และ Dy ด้วยความเข้าใจด้วยตัวเอง นำไปสู่การวาดภาพแสดงจุดและตำแหน่ง

ของเส้นโค้งบนแกน X และแกน Y การใช้สัญลักษณ์แสดงการเปลี่ยนแปลงของ Δx และ Δy ซึ่งมีการเปลี่ยนแปลงที่น้อยมากเกือบเข้าใกล้ 0 ผู้เรียนใช้หลักการทางคณิตศาสตร์ การบวก การลบ การคูณและการหาร การแทนค่า การลดรูปและการแก้สมการเพื่อเข้าสู่ความหมายของอนุพันธ์และการสร้างนิยามของอนุพันธ์

การหาอนุพันธ์ผ่านสื่อทำให้ผู้เรียนสามารถพิจารณาอัตราการเปลี่ยนแปลงเพื่อเข้าสู่นิยามของอนุพันธ์อย่างมีความหมาย โดยใช้แนวคิดของการเข้าใกล้ 0 มาเป็นเครื่องมือในการหาอนุพันธ์ ส่งผลให้เกิดการคำนวณทางคณิตศาสตร์ที่เป็นรูปธรรม ดังแสดงในภาพที่ 5



ภาพที่ 5 พัฒนาการคิดทางคณิตศาสตร์จากการเคลื่อนย้ายจากสื่อรูปธรรมไปสู่คณิตศาสตร์ที่เป็นแบบแผน

8. สรุปผลการวิจัย อภิปรายผลและข้อเสนอแนะ

8.1 สรุปผลการวิจัย: การเคลื่อนย้ายจากโลกเชิงกายภาพสู่โลกเชิงสัญลักษณ์เป็นเครื่องมือที่สำคัญของการพัฒนาการคิดทางคณิตศาสตร์ ซึ่งทำให้ผู้เรียนสามารถคำนวณทางคณิตศาสตร์ได้อย่างมีความหมายและส่งผลให้ก้าวเข้าสู่โลกคณิตศาสตร์อย่างมีประสิทธิภาพ แนวคิดทางคณิตศาสตร์ของผู้เรียนเบื้องต้นเริ่มจากโลกเชิงกายภาพผ่านการสัมผัส แล้วพัฒนาไปสู่โลกเชิงกึ่งสัญลักษณ์เพื่อสร้างความเข้าใจและจินตนาการที่เชื่อมโยงเข้าด้วยกัน แล้วพัฒนาไปสู่โลกเชิงสัญลักษณ์ในการคิดคำนวณทางคณิตศาสตร์ผ่านการใช้สัญญาณทางคณิตศาสตร์ และพัฒนาไปสู่โลกทางคณิตศาสตร์เพื่อสร้างนิยาม สัจพจน์ทางคณิตศาสตร์อย่างเป็นแบบแผน

สื่อที่เป็นรูปธรรมทำให้ผู้เรียนเกิดความเข้าใจผ่านการสัมผัส เชื่อมต่อช่องว่างระหว่างการจินตนาการกับการคิดคำนวณทางคณิตศาสตร์และทำให้ผู้เรียนเข้าสู่โลกคณิตศาสตร์ได้อย่างมีความหมาย การสร้างแนวคิดทางคณิตศาสตร์ตามแนวทางของผู้เรียนจากโลกเชิงกายภาพสู่โลกทางคณิตศาสตร์ทำให้เกิดการเชื่อมต่อและลดช่องว่างระหว่างระหว่างโลกทั้งสองได้

8.2 อภิปรายผลการวิจัย: การคิดซึ่งเริ่มต้นจากสื่อที่เป็นรูปธรรมซึ่งสามารถหยิบ จับ สัมผัส ส่งเสริมให้ผู้เรียนก้าวเข้าสู่โลกของการคำนวณได้อย่างรวดเร็ว และนำไปสู่การสร้างนิยาม การใช้หลักการทางคณิตศาสตร์อย่างถูกต้อง สอดคล้องกับ David Tall (2004) อธิบายถึงการพัฒนาการคิดทางคณิตศาสตร์ของผู้เรียนเกิดขึ้นจากโลกเชิงกายภาพสู่โลกคณิตศาสตร์และในขณะเดียวกันการคิดทางคณิตศาสตร์ของผู้เรียนเกิดขึ้นจากการปฏิบัติการไปสู่การคิดทางคณิตศาสตร์ที่เป็นแบบแผนแบบผสมผสานกัน [5]

8.3 ข้อเสนอแนะการวิจัย: ในการวิเคราะห์งานวิจัยนี้ ทำให้มีมุมมองดังนี้

8.3.1 ควรมีการสร้างกรอบการวิเคราะห์การพัฒนาการคิดทางคณิตศาสตร์ในแง่มุมอื่นที่สอดคล้องกับกระบวนการคิดทางคณิตศาสตร์

8.3.2 ผู้เรียนสามารถขยายแนวคิดทางคณิตศาสตร์ในการแก้ปัญหาได้ ควรมีการอภิปรายและวิเคราะห์ผลเพิ่มเติมต่อไป

9. ประโยชน์ของการวิจัย

งานวิจัยนี้เป็นประโยชน์สำหรับผู้สอนหรือผู้พัฒนาหลักสูตรโดยการนำแนวคิดของการวิจัยไปประยุกต์ใช้ในการออกแบบแผนการสอนที่เน้นการใช้สื่อการสอนที่เป็นรูปธรรมเพื่อให้นักศึกษาเกิดแนวทางการเรียนรู้ซึ่งเชื่อมโยงแนวคิดพื้นฐานสู่แนวคิดขั้นสูงได้

กิตติกรรมประกาศ

ขอขอบพระคุณมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลพระนคร

เอกสารอ้างอิง

- [1] David Tall. (2019a). Significant changes in university mathematics education. Unpublished draft prepared for Mike Thomas for use in preparation for ICME, 14.
- [2] David Tall. (2013). How humans learn to think mathematically: Exploring the three worlds of Mathematics. Cambridge University Press.

- [3] David Tall. (2021). Complementing supportive and problematic aspects of mathematics to resolve transgressions in long-term sense making. In Barbara Pieronkiewicz (Ed): Different Perspectives on Transgressions in Mathematics and its Education, pp. 11-33.
- [4] David Tall. (2019). The evolution of calculus: A personal experience 1956–2019. In Conference on Calculus in Upper Secondary and Beginning University Mathematics. Vol. 1. p. 17.
- [5] David Tall. (2004). Thinking Through Three Worlds of Mathematics. International Group for the Psychology of Mathematics Education.